الموضوع الثامن

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط :
$A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ ، $C(2;0;1)$.

1- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بيّن أنّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4- أ) عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$.

ب) احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

جـ) ماهي طبيعة المثلث ODE ؟ ثمّ استنتج المسافة بين O و (Δ).

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+10=0$.

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب:
$z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=1-3i$.

أ ـ أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسّي؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب ـ اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C ثمّ حدّد نسبته وزاويته.

جـ ـ عيّن z_E لاحقة النقطة E ؛ علما أنّ D هي صورة E بالتشابه S.

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\dfrac{1}{2}$.

أ ـ بيّن أنّ F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

ب ـ عيّن z_F لاحقة النقطة F .

التمرين الثالث:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I-1 . نعتبر الدّالة h المعرّفة على كما يلي: $h(x)=xe^x+1$.

أ) ادرس تغيّرات الدالة h .

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)>0$.

.2 نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x+2-e^x$.

أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha>\beta$ ثمّ تحقق أنّ $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

د) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- 1. احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثمّ فسّر النتائج هندسيا.

aziz_mus1@hotmail.fr

.2 أ) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^{2}}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

.3 أ) تحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

ب) عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

.4 عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

.5 أ) تحقق أنّ $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$ حيث $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة u ثمّ استنتج اشارة $u(x)$.

جـ) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

.6 أُرسم (T) و (C). (**نقبل أنّ** $-1,85<\beta<-1,84$ و $-1,19<f(\beta)<-1,18$)

التمرين الرابع:

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^{2}-2+\ln(x+1)$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^{2}$.

3- استنتج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^{2}+(2-\ln(x+1))^{2}$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^{2}\left(1+(\alpha+1)^{2}\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- أثبت أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ - بيّن أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ب - عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جـ - بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^{2}+1}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الثامن

التمرين الأول:

1- إثبات أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1).

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$ و $\frac{-1}{-2} \neq \frac{0}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه فإنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا (P_1).

تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P_1).

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل وعليه $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ يشكل معلما للمستوي (P_1).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت M تنتمي من (P_1) فإنها تحقق: $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

حيث α و β عددان حقيقيان و $\overrightarrow{AM} = (x-1;y-1;z-1)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=\beta \\ y-1=-2\alpha-\beta \\ z-1=-\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=1+\beta \\ y=1-2\alpha-\beta \\ z=1-\alpha \end{cases}$ و α و β عددان حقيقيان.

وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P_1).

2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- إثبات أنّ (P_1) و (P_2) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1;-2;-2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2).

نفرض أنّ $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P_1) إذن $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ ولدينا $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(0)-2(-2)-2(-1)=6 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=1(1)-2(-1)-2(0)=3 \end{cases}$ تناقض.

إذن الشعاع $\vec{n}$ ليس ناظميا للمستوي (P_1) وبالتالي المستويان (P_1) و (P_2) غير متوازيين فهما متقاطعان.

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M \in (\Delta)$ فإنّ إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases} x=1+\beta.....................(1) \\ y=1-2\alpha-\beta...........(2) \\ z=1-\alpha.....................(3) \\ x-2y-2z+6=0....(4) \end{cases}$.

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$1+\beta-2(1-2\alpha-\beta)-2(1-\alpha)+6=0$ ومنه $3\beta+6\alpha+3=0$ وعليه $\beta=-2\alpha-1$.

إذن $\begin{cases} x=1+(-2\alpha-1) \\ y=1-2\alpha-(-2\alpha-1) \\ z=1-\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z=1-\alpha \end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

3- إثبات أنّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

نسمي G هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ وعليه

$x_G=\frac{1+1-2}{1+1-1}=0$ ، $y_G=\frac{1-1-0}{1+1-1}=0$ ، $z_G=\frac{1+0-1}{1+1-1}=0$ ومنه النقطة G منطقة على O.

إذن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4- أ) تعيين (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$

من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MO}$ أي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$

ومنه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$ تعني $\left\|\overrightarrow{MO}\right\|=2\sqrt{3}$ أي $MO=2\sqrt{3}$.

إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزه O ونصف قطره $2\sqrt{3}$.

ب) حساب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

$x^2+y^2+z^2=12$ هي معادلة ديكارتية لـ (S).

نحل الجملة $\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=2 \\ z=1-\alpha \\ x^2+y^2+z^2=12 \end{cases}$ وعليه $(-2\alpha)^2+2^2+(1-\alpha)^2=12$ أي $5\alpha^2-2\alpha-7=0$

بعد حل المعادلة نجد: $\alpha=\frac{7}{5}$ أو $\alpha=-1$.

ومنه $\begin{cases} x=-2\left(\frac{7}{5}\right) \\ y=2 \\ z=1-\frac{7}{5} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-2(-1) \\ y=2 \\ z=1+1 \end{cases}$.

إذن يتقاطع (S) و (Δ) في النقطتين $D\left(-\frac{14}{5};2;-\frac{2}{5}\right)$ و $E(2;2;2)$.

جـ) طبيعة المثلث ODE.

بما أن النقطتين D و E تنتميان لسطح الكرة (S) التي مركزها O فإنّ $OE=OD$ ومنه فإنّ المثلث ODE متساوي السّاقين.

استنتاج المسافة بين O و (Δ).

بما أنّ النقطتين D و E تنتميان للمستقيم (Δ) فإنّ (Δ) هو المستقيم (DE).

المثلث ODE متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة O على (DE) هي النقطة H منتصف القطعة $[DE]$ ومنه $d(O;(DE))=OH$.

ولدينا $H\left(-\frac{2}{5};2;\frac{4}{5}\right)$ وعليه $OH=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+2^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

إذن $d(O;(\Delta))=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2-2z+10=0$.

$\Delta=4-40=-36=(6i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{2+6i}{2}=1+3i$ ، $z_2=\frac{2-6i}{2}=1-3i$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب:
$z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=1-3i$.

أ ـ كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-3+i-1-3i}{2+i-1-3i}=\frac{-4-2i}{1-2i}=\frac{(-4-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-10i}{5}=-2i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

$\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC قائم في B.

ب ـ كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C وتحديد نسبته و زاويته.

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z'-z_B=a\left(z-z_B\right)$ وبما أنّ $S(A)=C$ فإنّ $z_C-z_B=a\left(z_A-z_B\right)$

ومنه $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-2i$ وعليه العبارة المركبة للتشابه S هي $z'-z_B=-2i\left(z-z_B\right)$ أي $z'=-2iz-5+5i$

جـ ـ تعيين z_E لاحقة النقطة E؛ علما أنّ D هي صورة E بالتشابه S.

$S(E)=D$ معناه $z_D=-2iz_E-5+5i$ تكافئ $1-3i=-2iz_E-5+5i$ ومنه $z_E=\dfrac{6-8i}{-2i}=\dfrac{3-4i}{-i}$

أي $z_E=-4+3i$.

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\dfrac{1}{2}$.

أ ـ ـ تبيين أنّ F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

لدينا $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ معناه $\overrightarrow{AF}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $\overrightarrow{AF}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=\vec{0}$ تكافئ $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{0}$

تكافئ $-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{FA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{0}$ تكافئ $-3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$ نستنتج أن F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

ب ـ تعيين z_F لاحقة النقطة F.

$z_F=\dfrac{-3z_A+z_B}{-2}=\dfrac{-6-3i+1+3i}{-2}=-\dfrac{5}{2}$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. وحدة الرّسم $2cm$.

I- 1. نعتبر الدّالة h المعرّفة على كما يلي: $h(x)=xe^x+1$.

أ) دراسة اتجاه تغيّر الدالة h.

الدّالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $h'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

لدينا $e^x>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ كإشارة $(1+x)$ ؛ $h'(-1)=0$

من أجل $x\in\left]-\infty;-1\right[$ ، $h'(x)<0$ وعليه الدّالة h متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-1\right]$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

من أجل $x \in]-1;+\infty[$ ، $h'(x)>0$ وعليه الدّالة h متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

ب) تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)>0$.

لدينا الدالة h تقبل قيمة حدّية صغرى تبلغها عند $x=-1$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq h(-1)$ أي $h(x)\geq 1-e^{-1}$ وبالتالي $h(x)>0$.

2. نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x+2-e^{x}$.

أ) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-e^{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x+2-e^{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .

$g'(x)=1-e^{x}$

$g'(x)=0$ معناه $1-e^{x}=0$ ويكافئ $e^{x}=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ معناه $1-e^{x}>0$ ويكافئ $e^{x}<1$ أي $x<0$

$g'(x)<0$ معناه $1-e^{x}<0$ ويكافئ $e^{x}>1$ أي $x>0$

إذن الدّالة g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول التغيّرات.

x	$-\infty$	β		0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha>\beta$

الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0\in]-\infty;1]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-\infty;0]$.

ولدينا الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0\in]-\infty;1]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

التحقق أنّ $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

لدينا $g(1{,}14)\approx 0{,}013$ و $g(1{,}15)\approx -0{,}008$ أي $g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ ومنه $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

د) استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

II- 1. حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثمّ فسّر النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x+1=1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(x+e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$$

2. أ) تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x+2-e^x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

لدينا $e^x>0$ و $\left(xe^x+1\right)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

في المجموعة $]-\infty;\beta[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$ وعليه الدّالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\beta]$ و $[\alpha;+\infty[$

وفي المجال $]\beta;\alpha[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(\beta)$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3. أ) التحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

لدينا $g(\alpha)=0$ معناه $\alpha+2-e^{\alpha}=0$ أي $e^{\alpha}=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

لدينا $1{,}14<\alpha<1{,}15$ معناه $2{,}14<\alpha+1<2{,}15$ يكافئ $\dfrac{1}{2{,}15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2{,}14}$ أي $0{,}46<f(\alpha)<0{,}47$.

4. تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$.

5. أ) التحقق أنّ $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ **حيث** $u(x)=e^x-xe^x-1$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{-1-x+e^x(1-x^2)}{xe^x+1}=\frac{-(x+1)+e^x(1+x)(1-x)}{xe^x+1}$$

$$f(x)-x\ \frac{(1+x)(e^x(1-x)-1)}{xe^x+1}=\frac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة u **ثمّ استنتاج اشارة** $u(x)$.

الدالة u تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $u'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة $-x$

من أجل $x>0$ فإنّ $u'(x)<0$ ؛ ومن أجل $x<0$ فإنّ $u'(x)>0$ و $u'(0)=0$.

وعليه الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ولها قيمة حدية عظمى هي $u(0)=0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $u(x)\leq 0$.

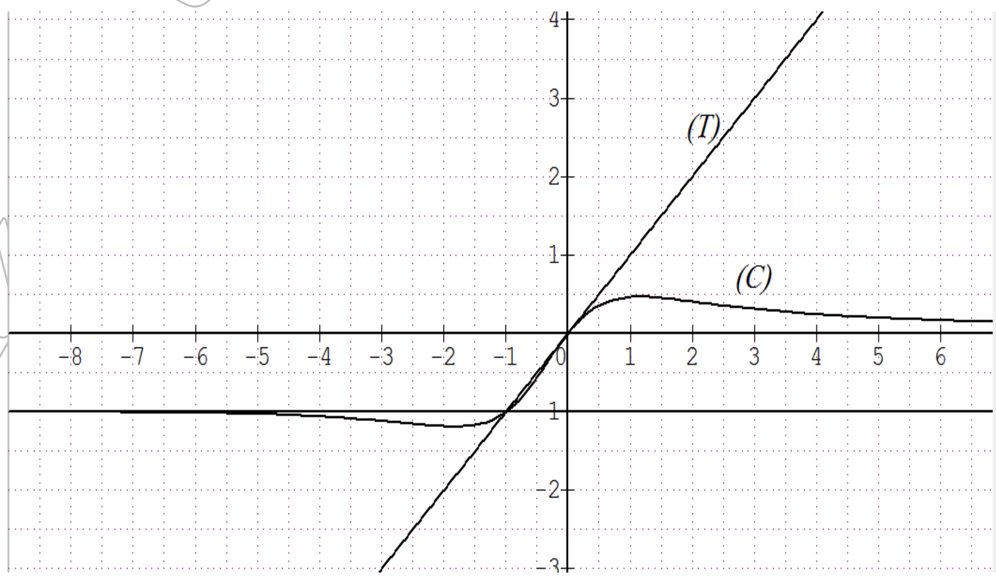
جـ) استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C) **بالنسبة إلى المماس** (T).

$f(x)-x=\dfrac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}=\dfrac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}$ لدينا $h(x)>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $(1+x)u(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

في المجال $]-\infty;-1[$ ، (C) يقع فوق (T) وفي المجال $]-1;+\infty[$ ، (C) يقع تحت (T) ويشتركان في النقطتين $A(-1;-1)$ و O

6. رسم (T) **و** (C).



التمرين الرابع:

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

الدّالة g تقبل على الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2- تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

الدّالة g مستمرة على $]-1;+\infty[$ لأنها تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31;0,32]$ ولدينا $g(0,31)\approx-0,01$ ، $g(0,32)\approx0,02$ أي $g(0,31)\times g(0,32)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتاج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$ كما أنّ $g(\alpha)=0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

2- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$.

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

3- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $\frac{2}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كإشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1;\alpha[$ وموجبة على $]\alpha;+\infty[$

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4- تبيين أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left(2-\ln(\alpha+1)\right)^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

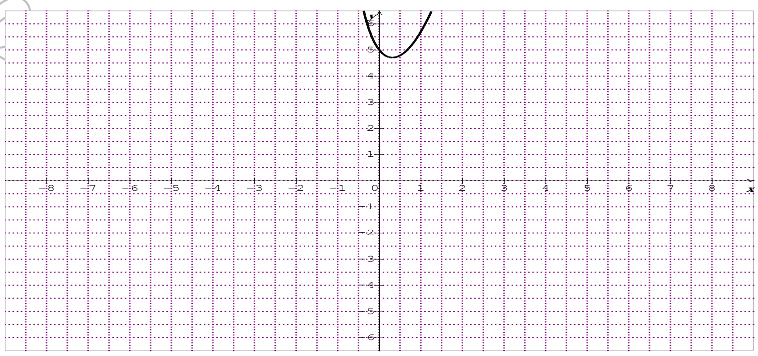
استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ يكافئ $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$ ويكافئ

$2,7161<1+(\alpha+1)^2<2,7424$ ومنه $1,7161\times 2,7161<(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)<1,7424\times 2,7424$ أي

$4,6611<f(\alpha)<4,7783$.

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.



III- (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- إثبات أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

لدينا $M(x;\ln(x+1))$ ومنه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+(\ln(x+1)-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2}=\sqrt{f(x)}$$

2- الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

أ تبيين أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

ولدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $2\sqrt{f(x)}>0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب ـ تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدّالة k متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ تبلغها من أجل $x=\alpha$ ومنه AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي عند النقطة $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$

جـ ـ تبيين أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr