

الموضوع العاشر

التمرين الأول:

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة:
- $A(3; -1; 2)$ ، $B(1; 1; -2)$ و $G(4; -2; 4)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + 3z + 8 = 0$.
- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ؛ ثم عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P) .
 - أ- بيّن أن G تنتمي للمستقيم (AB) وأنها مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.
ب- عيّن طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\| -3\vec{MA} + \vec{MB} \| = \| \vec{MA} - \vec{MB} \|$.
 - أ- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) ، ثم عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .
ب- استنتج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .
 - أ- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (AGH) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
ب- بيّن أنّ المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثاني:

- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$
 - المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و E التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 2i$ ، $z_B = -2i$ ، $z_C = 3 - i$ ، $z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.
- نضع $L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$
- أ- احسب طولية العدد المركب L وعمدة له، ثم فسر النتائج هندسياً.
ب- استنتج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.
 - نسمة (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$.
أ- بيّن أن B تنتمي إلى (Γ_1) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_1) .
ب- نسمة (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r . عيّن المجموعة (Γ_2) .
 - بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z' .
أ- اكتب العبارة المركبة للدوران r . ثم عيّن سابقة النقطة O بالدوران r .
ب- عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$.
 - أعط تفسيراً هندسياً لعمدة العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ ، ثم استنتج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقياً سالباً.

التمرين الثالث:

I- g دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $g(x) = e^x + x + 1$

- ادرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .
- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.
- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II- دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، ثم استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .

2. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ، ثم استنتج حصر الـ $f(\alpha)$.

3. عيّن معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (d) و (C_f) .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ، ثم ارسم (d) و (Δ) و (C_f) .

التمرين الرابع:

I- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

(1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانياً.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 أ) بين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3 أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

(أ) احسب x_0 .

(ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

(ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين.

حل الموضوع العاشر:

التمرين الأول:

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$ $M(x; y; z) \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 4t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = -2t \\ y + 1 = 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z - 2 = -4t \end{cases}$$

تعيين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P) .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \\ x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } 3 - 2t + 2 - 4t + 6 - 12t + 8 = 0 \text{ ومنه } t = \frac{19}{18}$$

$$\text{وعليه } \begin{cases} x = 3 - 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ y = -1 + 2\left(\frac{19}{18}\right) \\ z = 2 - 4\left(\frac{19}{18}\right) \end{cases} \text{ إذن } L\left(\frac{8}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right)$$

2. أ - تبين أن G تنتمي للمستقيم (AB) .

$$\text{تبيين أن } G \text{ مرجح النقطتين } A \text{ و } B \text{ المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.}$$

$$\text{لدينا } G \text{ تنتمي للمستقيم } (AB) \text{ من أجل } t = -\frac{1}{2} \text{ ومنه } \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ومنه } 2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\text{تكافئ } 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ وتكافئ } 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ ومنه } 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ إذن } G \text{ مرجح النقطتين } A \text{ و } B$$

$$\text{المرفقتين بـ } -3 \text{ و } 1 \text{ على الترتيب.}$$

ب - تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.لدينا G تنتمي للمستقيم (AB) من أجل $t = -\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$ تكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ومنه $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ إذن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ -3 و 1 على الترتيب.ب - تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$. G مرجح الجملة $\{(A; -3), (B; 1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$

ولدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

$$\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| \text{ معناه } \|-2\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \text{ أي } MG = \frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{2}$$

ولدينا $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$ ومنه $MG = \sqrt{6}$ وبالتالي (E) هي سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

3 أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن $\vec{n}(1; -2; 3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .

$M(x; y; z) \in (\Delta)$ معناه $\vec{GM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 4 = t \\ y + 2 = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z - 4 = 3t \end{cases} \text{ ومنه}$$

تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \text{ نحل الجملة} \quad \text{ومنه } 4 + t + 4 + 4t + 12 + 9t + 8 = 0 \text{ ومنه } t = -2$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

وعليه $H(2; 2; -2)$

ب - استنتاج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي (P) على المستقيم (Δ) هي نقطة تقاطعهما

وبما $L \in (P)$ فإن المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) هي LH .

$$LH = \sqrt{\frac{100}{81} + \frac{64}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{\sqrt{168}}{9} \text{ ومنه } \overline{LH} \left(\frac{10}{9}; \frac{8}{9}; \frac{2}{9} \right)$$

4 أ - كتابة تمثيلاً وسيطياً للمستوي (AGH)

لدينا $\vec{AG}(1; -1; 2)$ ، $\vec{AH}(-1; 3; -4)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{-1}$ ومنه النقط A ، G و H تعين مستويًا.

$M(x; y; z) \in (AGH)$ معناه $\vec{AM} = \alpha\vec{AG} + \beta\vec{AH}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + 3\beta; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x - 3 = \alpha - \beta \\ y + 1 = -\alpha + 3\beta; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z - 2 = 2\alpha - 4\beta \end{cases} \text{ ومنه}$$

استنتاج معادلة ديكارتية له.

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \dots\dots\dots (1) \\ y = -1 - \alpha + 3\beta \dots\dots\dots (2) \\ z = 2 + 2\alpha - 4\beta \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ بضرب المعادلة (1) بـ } -1 \text{ وجمع (1) و (2) و (3) نجد } -x + y + z + 2 = 0$$

وهي معادلة المستوي (AGH) .

ب - تبين أن المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}(1; -2; 3)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2}$ إذن الشعاعان \vec{n} و \vec{n}' غير مرتبطين خطياً ومنه المستويان (AGH) و (P) متقاطعان وفق مستقيم (d) .

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 8 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -x + y + z + 2 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \text{ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد } -y + 4z + 10 = 0$$

ومنه $y = 4z + 10$ بالتعويض في (1) نجد $x - 2(4z + 10) + 3z + 8 = 0$ ومنه $x = 5z + 12$



$$(d): \begin{cases} x = 5t + 12 \\ y = 4t + 10 \\ z = t \end{cases} \text{ وبوضع } z = t \text{ نجد}$$

التمرين الثاني:

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة: $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$

$$(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0 \text{ يكافئ } z^2 = -4 \text{ أو } z^2 - 6z + 10 = 0$$

حل المعادلة $z^2 = -4$.

$$z^2 = -4 \text{ تكافئ } z^2 = (2i)^2 \text{ ومنه } z = 2i \text{ أو } z = -2i.$$

حل المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$.

$$\Delta' = 9 - 10 = -1 = i^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = 3 + i \text{ أو } z = 3 - i.$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = 0$ هي: $\{2i; -2i; 3 + i; 3 - i\}$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, D و E

التي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 2i, z_B = -2i, z_C = 3 - i, z_D = 3 + i$ و $z_E = 2 - 2i$.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} \text{ نضع}$$

أ - حساب طولية العدد المركب L وعمدة له.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{3 - i - 2i}{3 + i + 2i} = \frac{3 - 3i}{3 + 3i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{ومنه } |L| = |-i| = 1 \text{ و } \arg(L) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

تفسير النتائج هندسياً.

$$|L| = 1 \text{ معناه } \frac{AC}{BD} = 1 \text{ ومعناه } AC = BD$$

$$\arg(L) = -\frac{\pi}{2} \text{ معناه } (\overline{BD}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ب - استنتاج أنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$\begin{cases} z_A = az_B + b \dots (1) \\ z_C = az_D + b \dots (2) \end{cases}$$

$$\text{بطرح (1) من (2) نجد } z_C - z_A = a(z_D - z_B) \text{ ومنه } a = \frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$$

بما أنه يوجد عدد مركب وحيد a غير معدوم و $|a| = |-i| = 1$ فإنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A

$$\text{ويحول } D \text{ إلى } C \text{ زاويته } \arg(a) = -\frac{\pi}{2}.$$

(3) نسمة (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$

أ - إثبات أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

$$B \text{ تنتمي إلى } (\Gamma_1) \text{ إذا كان } \arg(iz_B + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(iz_B + 1 - 3i) = \arg(3(1-i)) = -\frac{\pi}{4} \text{ ومنه } iz_B + 1 - 3i = i(-2i) + 1 - 3i = 3 - 3i = 3(1-i)$$

وهذا يعني أن B تنتمي إلى (Γ_1) .

تعيين المجموعة (Γ_1) .

$$\arg(i) + \arg(z - i - 3) = -\frac{\pi}{4} \text{ ومعناه } \arg(i(z - i - 3)) = -\frac{\pi}{4} \text{ ومعناه } \arg(iz + 1 - 3i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z - z_D) = -\frac{3\pi}{4} \text{ أي } \arg(z - (i+3)) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \text{ تكافئ } \frac{\pi}{2} + \arg(z - (i+3)) = -\frac{\pi}{4}$$

بالتالي (Γ_1) هي نصف مستقيم مبدؤه D وبما أن B تنتمي لـ (Γ_1) فإن (Γ_1) هي نصف المستقيم $[DB]$ باستثناء النقطة D .

ب - نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r .

تعيين المجموعة (Γ_2) .

$$\text{بما أن } \begin{cases} r(B) = A \\ r(D) = C \end{cases} \text{ فإن } (\Gamma_2) \text{ صورة } (\Gamma_1) \text{ هو نصف المستقيم } [CA] \text{ باستثناء النقطة } C.$$

أ - كتابة العبارة المركبة للدوران r .

$$\text{العبارة المركبة للدوران } r \text{ من الشكل } z' = -iz + b \text{ وبما أن } r(B) = A \text{ فإن } z_A = -iz_B + b$$

$$\text{ومنه } b = z_A + iz_B \text{ أي } b = 2 + 2i \text{ وعليه العبارة المركبة للدوران } r \text{ هي } z' = -iz + 2 + 2i$$

تعيين سابقة O بالدوران r .

$$z_0 = -iz + 2 + 2i \text{ تكافئ } -iz + 2 + 2i = 0 \text{ ومنه } z = \frac{2+2i}{i} = 2 - 2i = z_E$$

إذن سابقة O بالدوران r هي E أي $r(E) = O$.

ب - تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz + 2 + 2i| = |z_A|$.

$$|-iz + 2 + 2i| = |z_A| \text{ تكافئ } |z| = 2 \text{ تكافئ } OM' = 2 \text{ ، حيث } z' \text{ لاحقة النقطة } M' \text{ صورة النقطة } M \text{ بالدوران } r$$

$$\text{ولدينا } r(E) = O \text{ إذن } OM' = EM \text{ ومنه } EM = 2 \text{ بالتالي مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث } |-iz + 2 + 2i| = |z_A|$$

هي الدائرة ذات المركز E ونصف القطر 2 .

(5) التفسير الهندسي لعمدة العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$.

$$\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_D}\right) = (\overline{DM}; \overline{BM})$$

استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z - z_B}{z - z_D}$ حقيقيا سالبا.

$$\text{يكون العدد } \frac{z - z_B}{z - z_D} \text{ حقيقيا سالبا إذا كان } \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_D}\right) = \pi$$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right) = \pi$ تكافئ $(\overline{DM}; \overline{BM}) = \pi$ ومنه مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[DB]$

باستثناء النقطتين D و B .

التمرين الثالث:

I- دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $g(x) = e^x + x + 1$

1. دراسة تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x + 1 = -\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x + 1 = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,3 < \alpha < -1,2$.

الدالة g مستمرة على \mathbb{R} وبالتالي على المجال $[-1,3; -1,2]$ ولدينا $g(-1,3) \approx -0,02$ ، $g(-1,2) \approx 0,10$ أي

$$g(-1,3) \times g(-1,2) < 0 \quad \text{ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي } \alpha \text{ من المجال } [-1,3; -1,2]$$

بحيث $g(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} فإن α وحيد.

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

من أجل $x \in]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$

من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ ؛ و $g(\alpha) = 0$.

II- دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1. تبين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x(xe^x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

استنتاج تغيرات f على \mathbb{R} .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

في المجال $]-\infty; \alpha[$ ، $g(x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$.
وفي المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

2. **تبيين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$.**

لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ أي $e^\alpha = -(\alpha + 1)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-(\alpha + 1) + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

طريقة ثانية:

$$f(\alpha) - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} - (\alpha + 1) = \frac{\alpha e^\alpha - \alpha e^\alpha - e^\alpha - \alpha - 1}{e^\alpha + 1} = \frac{-(e^\alpha + \alpha + 1)}{e^\alpha + 1} = \frac{-g(\alpha)}{e^\alpha + 1}$$

لكن $g(\alpha) = 0$ ومنه $f(\alpha) - (\alpha + 1) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha + 1$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$.

$$-1,3 < \alpha < -1,2 \text{ معناه } -0,3 < \alpha + 1 < -0,2 \text{ أي } -0,3 < f(\alpha) < -0,2$$

3. **تعيين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.**

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ ولدينا } f'(0) = \frac{1}{2} \text{ و } f(0) = 0 \text{ ومنه } (d): y = \frac{1}{2}x$$

دراسة الوضع النسبي لـ (d) و (C_f)

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{x}{2} = \frac{2xe^x - xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{xe^x - x}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$



لدينا $2(e^x + 1) > 0$ ومنه إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $(e^x - 1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f(x) - \frac{1}{2}x$	+		+
الوضعية	(C _f) فوق (d)		(C _f) فوق (d)

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - x = \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

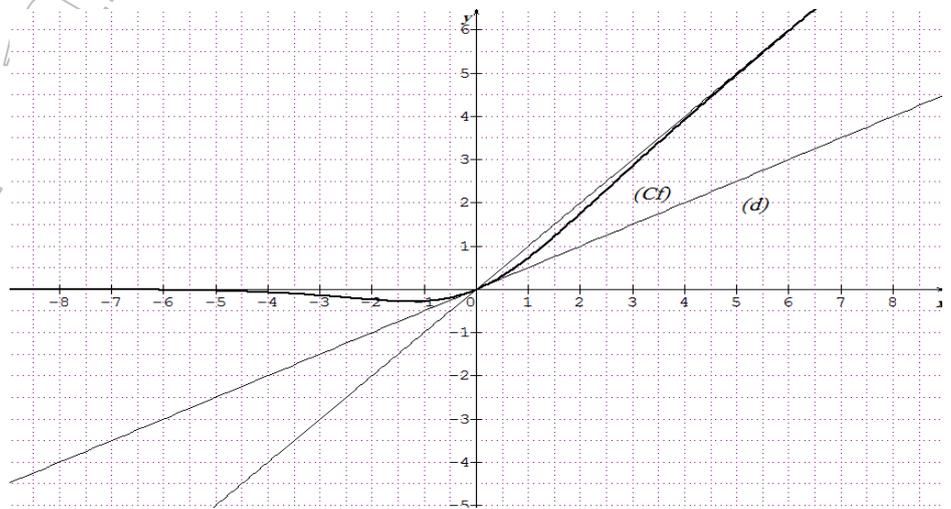
5. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

إشارة $f(x) - x$ هي نفس إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	(C _f) فوق (Δ)		(C _f) تحت (Δ)

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في O .

رسم (d) و (Δ) و (C_f) .



التمرين الرابع:

I- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) دراسة تغيرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 2\ln(x+1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 4x}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1} \text{ ولدينا: }]-1; +\infty[$$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $x+2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x .

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1; 0[$ و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$

(2) استنتاج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي $g(x) > 0$.

II- الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

(1 أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

(2 أ) تبين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 + 2\ln(x+1) \\
 &= 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{g(x)}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $(x+1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في \mathbb{R} إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1; +\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ وبما أن $f(0) \times f(0,5) < 0$ فإن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

$$f(x) - x = -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} = \frac{2\ln(x+1) - 1}{x+1}$$

$$f(x) - x = 0 \text{ معناه } 2\ln(x+1) - 1 = 0 \text{ وتكافئ } \ln(x+1) = \frac{1}{2} \text{ أي } x = \sqrt{e} - 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ معناه } 2\ln(x+1) - 1 > 0 \text{ وتكافئ } \ln(x+1) > \frac{1}{2} \text{ أي } x > \sqrt{e} - 1$$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(\sqrt{e}-1; \sqrt{e}-1)$.

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

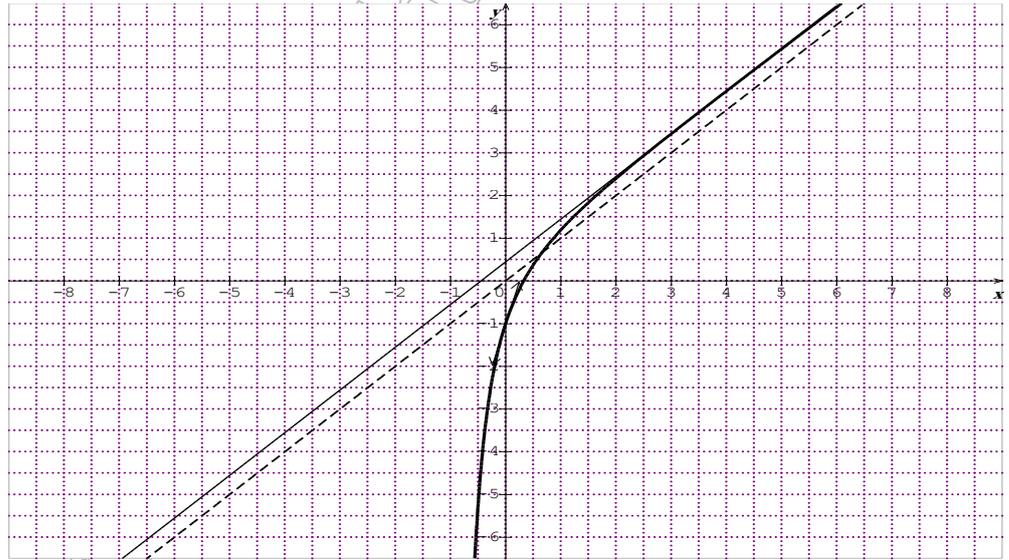
(أ) حساب x_0 .

المستقيم (T) ميله يساوي 1 ومنه $f'(x_0) = 1$.

$f'(x_0) = 1$ معناه $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1$ تكافئ $x_0^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0+1) = x_0^2 + 2x_0 + 1$ وتكافئ

$$\ln(x_0+1) = \frac{3}{2} \text{ أي } x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

(ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .



(ج) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين متمايزين من أجل قيم m من المجال $0; \frac{2}{\sqrt{e^3}}$.