الموضوع الحادي عشر

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(1;1;0\right)$، $B\left(-1;0;2\right)$، $C\left(-1;0;1\right)$

والمستوي $\left(P\right)$ الذي تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=\lambda+\mu-2 \\ z=3\lambda+\mu+3 \end{cases}$ حيث λ و μ عددان حقيقيان.

1. تحقق أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية، ثمّ بيّن أنّ $x-2y+1=0$ هي معادلة للمستوي $\left(ABC\right)$.
2. أ ـ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P\right)$.
   ب ـ تحقق أنّ C نقطة من $\left(P\right)$.
3. أ ـ تحقق أنّ المستويين $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$ متعامدان، ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ مستقيم تقاطعهما.
   ب ـ احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم $\left(\Delta\right)$.
4. لتكن G مرجح الجملة: $\left\{\left(A;3\right),\left(B;\alpha\right),\left(C;\alpha^2\right)\right\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.
   أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي α فإنّ G موجودة.
   ب ـ عيّن قيمة α حتى تنتمي G إلى المستقيم $\left(\Delta\right)$.

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2+z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A، B، C، D و F

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$ ، $z_D=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_F=\overline{z_D}$.

أ ـ اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي، ثمّ علم النقط A، B، C، D و F.

ب ـ ما طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+2\right)$.

أ ـ عيّن مركز وزاوية الدوران R.

ب ـ لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R. بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=1+\sqrt{3}i$.

جـ ـ اكتب العدد $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري، ثمّ استنتج أنّ المستقيمين $\left(ED\right)$ و $\left(EF\right)$ متعامدان.

4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E، نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-z_C}{z-z_E}$.

ـ لتكن $\left(\Gamma_1\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا. عيّن المجموعة $\left(\Gamma_1\right)$.

5) لتكن G مرجح الجملة $\left\{\left(A;\left|z_A\right|\right),\left(B;\left|z_B\right|\right),\left(C;\left|z_C\right|\right)\right\}$.

أ ـ عيّن z_G لاحقة النقطة G.

ب ـ $\left(\Gamma_2\right)$ هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

ـ تحقق أنّ C تنتمي إلى $\left(\Gamma_2\right)$، ثمّ عيّن طبيعة $\left(\Gamma_2\right)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x};\quad x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) بين أنَ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$ (يمكن وضع $t=\ln x$) ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) بين أنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث ، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5) بين أنه من أجل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم استنتج أنَ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

6) أحسب $f(4)$ أرسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

أ) بين أنَ الدالة g زوجية .

ب) اشرح كيفية الحصول على $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

التمرين الرابع:

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول $2cm$

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

ب ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

جـ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

2. أ ـ بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها.

ب ـ اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

3. ارسم (Δ)، (D) و (C).

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m ، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

حل الموضوع الحادي عشر

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(1;1;0\right)$ ، $B\left(-1;0;2\right)$ ، $C\left(-1;0;1\right)$

والمستوي (P) الذي تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=\lambda+\mu-2 \\ z=3\lambda+\mu+3 \end{cases}$ حيث λ و μ عددان حقيقيان.

1. التحقق أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية،

$\overrightarrow{AB}\left(-2;-1;2\right)$ ، $\overrightarrow{AB}\left(-2;-1;1\right)$ من الواضح أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A، B و C ليست في استقامية.

تبيين أنّ $x-2y+1=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

لدينا $x_A-2y_A+1=1-2+1=0$ ، $x_B-2y_B+1=-1-0+1=0$ ، $x_C-2y_C+1=-1-0+1=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x-2y+1=0$ وبالتالي $x-2y+1=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2. أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

$\begin{cases} x=\lambda+1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y=\lambda+\mu-2 \ldots\ldots\ldots(2) \\ z=3\lambda+\mu+3 \ldots\ldots(3) \end{cases}$ من (1) نجد $\lambda=x-1$ بالتعويض في (2) و (3) نجد $\begin{cases} y=x+\mu-3 \ldots\ldots\ldots(4) \\ z=3x+\mu \ldots\ldots\ldots\ldots(5) \end{cases}$

بضرب (5) بالعدد -1 وبجمع المعادلتين نجد $y-z=-2x-3$ ومنه $2x+y-z+3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

ب ـ التحقق أنّ C نقطة من (P).

لدينا $2x_C+y_C-z_C+3=2(-1)+0-1+3=0$ ومنه $C\in(P)$.

3. أ ـ التحقق أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

لدينا $\vec{n}\left(1;-2;0\right)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) و $\vec{n}'\left(2;1;-1\right)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P).

و $\vec{n}.\vec{n}'=1(2)-2(1)+0(-1)=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{n}'$ أي المستويان (P) و (ABC) متعامدان.

تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطعهما.

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases} x-2y+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x+y-z+3=0 \ldots\ldots(2) \end{cases}$

من (1) نجد $x=2y-1$ بالتعويض في (2) نجد $2(2y-1)+y-z+3=0$ ومنه $5y+1-z=0$ أي

$z=5y+1$ وبوضع $y=t$ نجد $(\Delta):\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=5t+1 \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي .

ب ـ احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

بما أن (P) و (ABC) متعامدان و $A\in(ABC)$ فإن $d\left(A;(\Delta)\right)=d\left(A;(P)\right)$

لدينا $\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{\left|2(1)+1-1+3\right|}{\sqrt{4+1+1}}=d\left(A;(P)\right)$ ومنه $d\left(A;(\Delta)\right)=\frac{5}{\sqrt{6}}$.

4. لتكن G مرجح الجملة: $\left\{(A;3),(B;\alpha),(C;\alpha^2)\right\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي α فإنّ G موجودة.

G موجودة معناه $3+\alpha+\alpha^2\neq 0$

$\Delta=1-12=-11$ ومنه المعادلة $3+\alpha+\alpha^2=0$ لا تقبل حلولا أي من أجل كل عدد حقيقي α، $3+\alpha+\alpha^2\neq 0$
وعليه أجل كل عدد حقيقي α فإنّ G موجودة.

ب ـ تعيين قيمة α حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ).

لدينا $G\left(\dfrac{3-\alpha-\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2};\dfrac{3}{3+\alpha+\alpha^2};\dfrac{2\alpha+\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2}\right)$ حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) يكفي أن تنتمي إلى (P)

لأن G هي مرجح النقط A، B و C فهي حتما تنتمي للمستوي (ABC).

$G\in(P)$ معناه $2\left(\dfrac{3-\alpha-\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2}\right)+\dfrac{3}{3+\alpha+\alpha^2}-\dfrac{2\alpha+\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2}+3=0$ وتكافئ $\dfrac{9-4\alpha-3\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2}+3=0$

وتكافئ $\dfrac{9-4\alpha-3\alpha^2+9+3\alpha+3\alpha^2}{3+\alpha+\alpha^2}=0$ وتكافئ $\dfrac{18-\alpha}{3+\alpha+\alpha^2}=0$ أي $\alpha=18$.

__طريقة ثانية:__

لدينا $C\in(\Delta)$ لأنها تنتمي لـ(P) و تنتمي لـ(ABC) و $\vec{u}(2;1;5)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

ولدينا G مرجح الجملة: $\{(A;3),(B;\alpha),(C;\alpha^2)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا :

$(3+\alpha+\alpha^2)\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{MB}+\alpha^2\overrightarrow{MC}$ ومن أجل M منطبقة على C يكون:

$(3+\alpha+\alpha^2)\overrightarrow{CG}=3\overrightarrow{CA}+\alpha\overrightarrow{CB}$

$G\in(\Delta)$ معناه الشعاعان $\overrightarrow{CG}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا أي الشعاعان $3\overrightarrow{CA}+\alpha\overrightarrow{CB}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا.

لدينا $3\overrightarrow{CA}+\alpha\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}6\\3\\-3+\alpha\end{pmatrix}$ ومنه $\dfrac{6}{2}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{-3+\alpha}{5}$ ومنه $-3+\alpha=15$ أي $\alpha=18$.

__التمرين الثاني:__

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2+z+1=0$.

$\Delta=1-4=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ و $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A، B، C، D و F

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$ ، $z_D=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_F=\overline{z_D}$.

أ ـ كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي، و علم النقط A، B، C، D و F.

$|z_A|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ، $\arg(z_A)=\theta$ بحيث $\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\dfrac{2\pi}{3}$

وعليه $z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_B=\overline{z_A}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب ـ طبيعة المثلث ABC .

$$AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$$

$$AC=\left|z_C-z_A\right|=\left|-2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

$$BC=\left|z_C-z_B\right|=\left|-2+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

ومنه $AB=AC=BC$ بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$.

أ ـ تعيين مركز وزاوية الدوران R .

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z'-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)$

لدينا $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$ تكافئ $z'-z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_C)$ ومنه مركز الدوران R هو النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ب ـ لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R .

إثبات أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=1+\sqrt{3}i$.

لدينا $z_E+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D+2)$ معناه $z_E=e^{-i\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}i)-2$ وتكافئ $z_E=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2\sqrt{3}i)-2$

وعليه $z_E=1+\sqrt{3}i$.

جـ ـ كتابة العدد $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}=\frac{-2-2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{-2+2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}}=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\sqrt{3}i \ .$$

استنتاج أنّ المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

لدينا $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}=\sqrt{3}i$ ومنه $\arg\left(\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EF}$

ومنه المستقيمان (ED) و (EF) متعامدان.

4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-z_C}{z-z_E}$.

ـ لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا.

تعيين المجموعة (Γ_1).

M تنتمي لـ(Γ_1) معناه $z'=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $z\neq z_E$

ولدينا $\arg(z')=\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_E}\right)=\left(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MC}\right)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

وعليه M تنتمي لـ(Γ_1) معناه $M=C$ أو $(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MC})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $M\neq E$.

بالتالي (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E.

5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;|z_A|),(B;|z_B|),(C;|z_C|)\}$.

أ ـ تعيين z_G لاحقة النقطة G.

لدينا $|z_A|=1$ ، $|z_B|=1$ ، $|z_C|=2$ ومنه G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;2)\}$

$$z_G=\frac{z_A+z_B+2z_C}{3}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-4}{3}=\frac{-5}{3}$$

ب ـ (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

ـ التحقق أنّ C تنتمي إلى (Γ_2).

$\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CC}\right\|$ ومنه $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ (محققة) ومنه C تنتمي إلى (Γ_2).

تعيين طبيعة (Γ_2).

من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$

و $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$ تعني $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ أي $MG=\frac{\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|}{4}$.

ولدينا $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=|z_A-z_C+z_B-z_C|=|3|=3$ ومنه $MG=\frac{3}{4}$.

بالتالي (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{4}$.

التمرين الثالث:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x};\ x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) **تبيين أنَ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .**

نضع $t=\ln x$ إذا كان $x\xrightarrow{x>0}0$ فإن $t\to-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} = \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(0)=-1$ فإن الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{1-\ln x}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x - x\ln x) = 0^+$

التفسير: الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0 ومنحناها البياني يقبل حامل محور التراتيب مماسا له عند النقطة التي إحداثياها $(0;-1)$

2) **تبيين أنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ و تفسير النتيجة هندسيا .**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t}{1-t} = -1$$

التفسير: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $+\infty$.

3) **أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث ، $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$:** $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) + \frac{1}{x}\ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x + \ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ يكون $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;e[$ و $]e;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$

4) **كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة** 1.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه $y = 1(x-1)$ أي $y = x-1$.

5) **تبيين أنه من أجل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم استنتج أنَ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .**

تذكير: $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$

من أجل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ لدينا:

$$f''(x) = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 + 2x\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-(1-\ln x)(1-\ln x - 2)}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $1+\ln x$ لأنّ $x^2(1-\ln x)^3 > 0$ من أجل كل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$

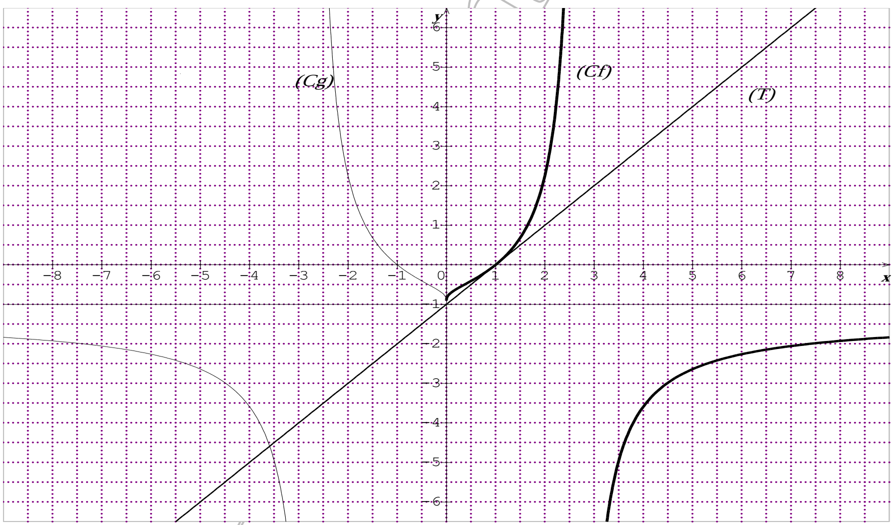
$f''(x)=0$ تعني $1+\ln x=0$ وتكافئ $\ln x=-1$ أي $x=\frac{1}{e}$

$f''(x)>0$ تعني $1+\ln x>0$ وتكافئ $\ln x>-1$ أي $x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها و منه النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

6) **حساب** $f(4)$ **ثم ارسم** (T) **و** $(\mathcal{C}_f)$.



7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

أ) تبيين أنّ الدالة g **زوجية .**

لدينا D_g متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$$

ت) شرح كيفية الحصول على $(\mathcal{C}_g)$ **انطلاقا من** $(\mathcal{C}_f)$ **ثم ارسم** $(\mathcal{C}_g)$.

$$\begin{cases} g(x)=f(x);x\in[0;e[\cup]e;+\infty[\\ g(x)=f(-x);x\in]-\infty;-e[\cup]-e;0] \end{cases}$$

لما $x\in[0;e[\cup]e;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C}_g)$ منطبق على $(\mathcal{C}_f)$ وبما أن الدالة g زوجية فإن $(\mathcal{C}_g)$ يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الرابع:

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول $2cm$

.1 أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x=0^{+}$.

تفسير النتيجتين بيانيا.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإنّ (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل)

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

ب ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ ويكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ ويكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. أ ـ تبيين أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x^3>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-3+2\ln x=0$ وتكافئ $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0$ معناه $-3+2\ln x>0$ و تكافئ $\ln x>\frac{3}{2}$ أي $x>\sqrt{e^3}$

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E\left(\sqrt{e^3};f\left(\sqrt{e^3}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

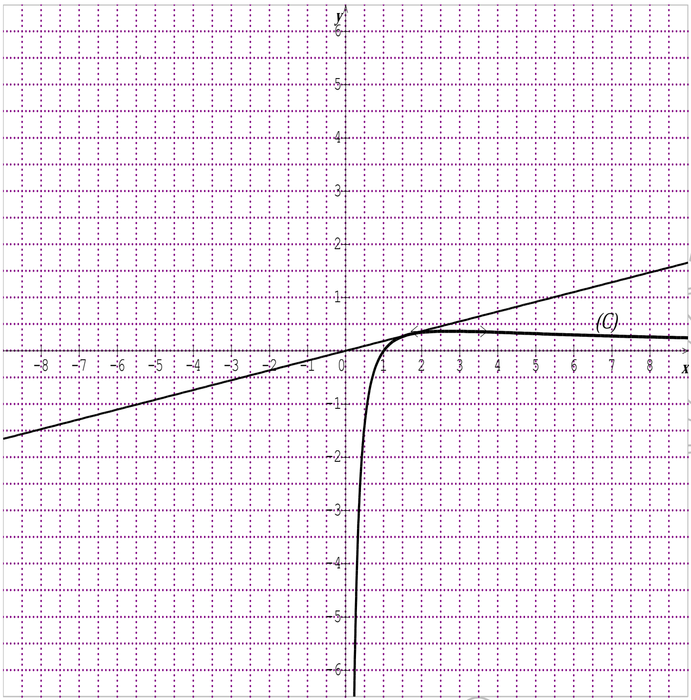
جـ ـ كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

معادلة المماس من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$O\in(D)$ معناه $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^{\,2}}\right)+\dfrac{\ln x_0}{x_0}=0$

وتكافئ $\dfrac{-1+2\ln x_0}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0=\dfrac{1}{2}$ أي $x_0=\sqrt{e}$

إذن معادلة المماس هي $y=f'\left(\sqrt{e}\right)x$ أي $y=\dfrac{1}{2e}x$



3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

$m^x=x$ تكافئ $\ln m^x=\ln x$ وتكافئ $x\ln m=\ln x$

وتكافئ $\ln m=\dfrac{\ln x}{x}$ أي $f(x)=\ln m$

إذا كان $0<m\le 1$ فإنّ $\ln m\le 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $1<m<e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $0<\ln m<\dfrac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m=e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m=\dfrac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m>\dfrac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.