الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

1– حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y') : $9x'-14y'=13$ علما أن $(3,1)$ حلا لها

2– نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$

. بين أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5، ثم حل هذه المعادلة.

3– N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7.

. عيّن α و β، ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط:

$A(0;0;2)$، $B(0;4;0)$، $C(2;0;0)$، $D(-2;5;6)$ و $H(-4;4;4)$.

1. أ ـ بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب ـ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. بيّن أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

3. بيّن أنّ النقطة H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$.

4. لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CH}=-48$

أ ـ بيّن أنّ النقطة M تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CH}=48$.........$(2)$

ب ـ تحقق من أنّ النقطة A تنتمي إلى (E).

جـ ـ بيّن أنّ العلاقة (2) تكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CH}=0$

د ـ استنتج طبيعة المجموعة (E).

التمرين الثالث:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

أ ـ تحقق أنّ 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A، B و C ذات اللاحقات: $z_A=2$، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ ـ اكتب كلا من z_B، z_C و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي.

ب ـ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي بحيث يكون $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا.

جـ ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي فردي n : $z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=0$.

د ـ أنشئ النقط A، B و C ثمّ عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

3. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{z_A.\overline{z}-z_C}{\overline{z}-z_C}$

أ ـ لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $\left|\left(\overline{z}-\overline{z}_B\right)\left(z-z_C\right)\right|=1$؛ عيّن ثم أنشئ المجموعة (E).

ب ـ تحقق أنّ $z'=z_A+\dfrac{z_C}{\overline{z}-z_C}$.

جـ ـ بيّن أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-1-2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{1-(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
2. برهن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$)، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. أ ـ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب ـ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

5. أ ـ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α؛ حيث $0.3<\alpha<0.4$.

ب ـ أُرسم (Δ) و (C_f).

6. نعتبر الدّالة العددية h المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=f(-x)$، (C_h) تمثيلها البياني.

- اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من المنحنى (C_f) ثمّ ارسمه.

aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

1– ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7 .

2– بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $3\times100^{3n+2}+8\times102^{3n}-104$ مضاعفا للعدد 7.

3– أ ـ هل العدد 101 أولي ؟ برّر، عين $PGCD(505,303)$.

ب ـ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $505x-303y=1111.....(1)$

حل المعادلة (1) علما أن الحل الخاص (x_0,y_0) يحقق : $x_0+3y_0=-5$.

جـ ـ نفرض أن x و y موجبان.

4– ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1).

ـ ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ـ أوجد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d=11$

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(2;1;2)$، $B(0;2;-1)$، $H(1;1;0)$ والمستقيم (Δ) معرّف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=-2+6t \\ y=1-2t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

2. بيّن أنّ (AB) و (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3. (P) هو المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ).

أ ـ تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P).

ب ـ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

جـ ـ احسب المسافة بين (P) و (Δ).

4. عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي (Q)؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MA^2-MB^2=2$.

ـ تحقق أنّ النقطة H تنتمي إلى (Γ) ثمّ استنتج طبيعة المجموعة (Γ).

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها $z_A=i$ ، $z_B=\sqrt{2}$، $z_C=\sqrt{2}+i$ على الترتيب. ونسمي I ، J ، K منتصفات القطع $\left[OB\right]$، $\left[AC\right]$، $\left[CB\right]$ و S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I ويحول O إلى B

1- عيّن العبارة المركبة للتشابه S، ثمّ عيّن مركزه ω.

2- عيّن صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S.

3- نعتبر التحويل $S^2=S\circ S$.

أ - عيّن صورة النقط O، B ، A بالتحويل S^2.

ب - برهن أنّ S^2 تحاك يطلب تعيين عناصره.

جـ - استنتج أنّ المستقيمات $\left(OC\right)$، $\left(BJ\right)$، $\left(AK\right)$ متقاطعة.

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $g\left(x\right)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln\left(x+1\right)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.9<\alpha<4$.

3. عيّن، حسب قيّم x إشارة $g\left(x\right)$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=e^{-x}\ln\left(e^{2x}+1\right)$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. علما أن $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\left(t+1\right)}{t}=1$ عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. بين أن: $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{e^x}$، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

3. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f'\left(x\right)=e^{-x}g\left(e^{2x}\right)$.

ب - عين إشارة $f'\left(x\right)$.

جـ - استنتج إتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$. أنشئ $\left(C_f\right)$. يعطى $\dfrac{\ln\alpha}{2}\approx 0{,}6$ و $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)\approx 0{,}8$

حل الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

1− حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x',y') : $9x'-14y'=13$ علما أن $(3,1)$ حلا لها

لدينا $\begin{cases}9x'-14y'=13\\9(3)-14(1)=13\end{cases}$ بالطرح نحصل على $9(x'-3)-14(y'-1)=0$ أي

$9(x'-3)=14(y'-1)$ لدينا 14 يقسم $9(x'-3)$ و 14 و9 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 14 يقسم $x'-3$ ومنه $x'-3=14k$ أي $x'=14k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في $9(x'-3)=14(y'-1)$ نجد $14(y'-1)=9\times14k$ ومنه $y'-1=9k$ أي $y'=9k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2− نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y) : $45x-28y=130$

تبيين أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.

$45x-28y=130$ تكافئ $45x=28y+130$ أي $45x=2(y+65)$ ومنه 2 يقسم $45x$ والعددان 2 و 45 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2.

وكذلك لدينا $28y=45x-130$ أي $28y=5(x-26)$ ومنه 5 يقسم $28y$ والعددان 5 و 28 لأوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5.

حل المعادلة.

x مضاعف للعدد 2 معناه $x=2x'$ حيث $x'\in\mathbb{Z}$ و y مضاعف للعدد 5 معناه $y=5y'$ حيث $y'\in\mathbb{Z}$

إذن $45x-28y=130$ تكافئ $45\times2x'-28\times5y'=130$ وتكافئ $10(9x'-14y')=130$ أي $9x'-14y'=13$ وحسب ما سبق $x'=14k+3$ و $y'=9k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وعليه $x=2(14k+3)$ و $y=5(9k+1)$ أي $x=28k+6$ و $y=45k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3− N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7.

تعيين α و β، ثم اكتب N في النظام العشري .

لدينا $N=3\times9^0+\alpha\times9^1+\alpha\times9^2+2\times9^3$ ومنه $N=3+9\alpha+81\alpha+1458$ أي $N=90\alpha+1461$ حيث $0\le\alpha\le8$ ومن جهة أخرى $N=6\times7^0+\beta\times7^1+\beta\times7^2+5\times7^3$ أي $N=56\beta+1721$ حيث $0\le\beta\le6$ وعليه $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومنه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$ وحسب ماسبق $\alpha=28k+6$ و $\beta=45k+5$ مع $k\in\mathbb{N}$ ولدينا $0\le\alpha\le8$ و $0\le\beta\le6$ معناه $28k+6\le8$ و $45k+5\le6$ أي $k\le\frac{1}{14}$ و $k\le\frac{1}{4}$

وعليه $k=0$ وبالتالي $\alpha=6$ و $\beta=5$

إذن $N=90\times6+1461=2001$.

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(0;0;2)$، $B(0;4;0)$، $C(2;0;0)$، $D(-2;5;6)$ و $H(-4;4;4)$.

1. أ - تبيين أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;4;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;0;-2)$ من الواضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) عندئذ $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه $4b-2c=0$ و $2a-2c=0$ أي $c=2b$ و $c=a$ وبأخذ $c=2$ نجد $a=2$ و $b=1$ إذن $\vec{n}(2;1;2)$

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x+y+2z+d=0$ ولدينا $A\in(ABC)$ يعني $4+d=0$ أي $d=-4$ وعليه $2x+y+2z-4=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. تبيين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

لدينا $2x_H+y_H+2z_H-4=-8+4+4-4=0$ ومنه $H\in(ABC)$

ولدينا $\overrightarrow{DH}(-2;-1;-2)$ ومنه $\overrightarrow{DH}=-\vec{n}$ أي الشعاعان $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

3. تبيين أنّ النقطة H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(4;-4;-2)$، $\overrightarrow{HB}(4;0;-4)$ و $\overrightarrow{HC}(6;-4;-4)$

أي $-2\overrightarrow{HA}(-8;8;4)$، $-\overrightarrow{HB}(-4;0;4)$ و $2\overrightarrow{HC}(12;-8;-8)$ إذن إحداثيات الشعاع

$-2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}$ هي $(-8-4+12;8+0-8;4+4-8)$ أي $(0;0;0)$ وهذا يعني أنّ

$-2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ومنه H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$.

4. لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CH}=-48$

أ ـ تبيين أنّ النقطة M تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CH}=48........(2)$

لدينا H هي مرجح للجملة المثقلة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$ إذن من أجل نقطة M من الفضاء:

$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}$ أي $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$

M تنتمي إلى (E) معناه $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CH}=-48$ وتكافئ $-\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CH}=-48$ أي $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CH}=48$.

ب ـ التحقق من أنّ النقطة A تنتمي إلى (E).

لدينا $\overrightarrow{AH}(-4;4;2)$ و $\overrightarrow{CH}(-6;4;4)$ إذن $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}=-4\times-6+4\times4+2\times4=48$ ومنه $A\in(E)$

جـ ـ تبيين أنّ العلاقة (2) تكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CH}=0$

$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CH}=48$ معناه $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{CH}=48$ وتكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}=48$ وتكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CH}+48=48$ أي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CH}=0$.

إذن (E) هي المستوي الذي يشمل A ويكون $\overrightarrow{CH}$ شعاعا ناظميا له.

التمرين الثالث:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

أ ـ التحقق أنّ 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$P(2)=2^3-4(2)^2+8(2)-8=0$ ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A، B و C ذات اللاحقات: $z_A=2$، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ ـ كتابة كلا من z_B، z_C و $\dfrac{z_B}{z_C}$ على الشكل الأسّي.

$$z_B=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C=\overline{z_B}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{z_B}{z_C}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ب ـ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا $\left(\dfrac{z_B}{z_C}\right)^n=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{2n\pi}{3}}$

$\left(\dfrac{z_B}{z_C}\right)^n$ حقيقي معناه $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_C}\right)=k\pi$ ومنه $\dfrac{2n\pi}{3}=k\pi$ أي $2n=3k$

لدينا 3 يقسم $2n$ والعددان 2 و3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم n ومنه $n=3\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

جـ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي فردي n: $z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=0$.

$$z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n}+\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n}+2^{3n+1}=2^{3n}e^{in\pi}+2^{3n}e^{-in\pi}+2^{3n+1}$$

بما أن n عدد فردي فإنّ $e^{in\pi}=e^{-in\pi}=-1$

ومنه $z_B^{3n}+z_C^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n}-2^{3n}+2^{3n+1}=-2(2)^{3n}+2^{3n+1}=-2^{3n+1}+2^{3n+1}=0$

د ـ أنشئ النقط A، B و C

تعيين طبيعة الرباعي $OBAC$.

لدينا $z_A - z_C = 2-1+i\sqrt{3} = 1+i\sqrt{3}$ ومنه $z_A - z_C = z_B$ و هذا يعني أنّ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB}$

ولدينا $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $\left|\frac{z_B}{z_C}\right| = 1$ أي $OB = OC$ إذن $OBAC$ معيّن.

3. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{z_A.\overline{z} - z_C}{\overline{z} - z_C}$

أ - لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $(z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 1$؛

تعيين و إنشاء المجموعة (E).

$(z - z_B)(\overline{z} - z_C) = 1$ معناه $(z - z_B)(\overline{z} - \overline{z_B}) = 1$ وتكافئ $(z - z_B)(\overline{z - z_B}) = 1$

ومنه $|z - z_B|^2 = 1$ وعليه $|z - z_B| = 1$ أي $BM = 1$ $\boxed{☜ \text{ تذكير: } \alpha.\overline{\alpha} = |\alpha|^2}$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 1.

ب - التحقق أنّ $z' = z_A + \frac{z_C}{\overline{z} - z_C}$.

لدينا $z' - z_A = \frac{z_A.\overline{z} - z_C}{\overline{z} - z_C} - z_A = \frac{z_A.\overline{z} - z_C - z_A.\overline{z} + z_A.z_C}{\overline{z} - z_C} = \frac{-z_C + 2z_C}{\overline{z} - z_C}$

$z' - z_A = \frac{z_C}{\overline{z} - z_C}$

ومنه $z' = z_A + \frac{z_C}{\overline{z} - z_C}$

جـ - تبيين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (E) فإن النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $z' = z_A + \frac{z_C}{\overline{z} - z_C}$ معناه $z' - z_A = \frac{z_C}{\overline{z} - \overline{z_B}}$ ومنه $|z' - z_A| = \left|\frac{z_C}{\overline{z - z_B}}\right|$

أي $|z' - z_A| = \frac{|z_C|}{|\overline{z - z_B}|}$ و هذا يعني $AM' = \frac{2}{BM}$

إذا كانت M تمسح المجموعة (E) فإن $BM = 1$

✍ توضيح: $|\overline{z - z_B}| = |z - z_B| = BM$

✍ تذكّر: $|\overline{z}| = |z|$

ومنه $AM' = \frac{2}{1} = 2$ وعليه فإن M' تمسح الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 2.

<u>التمرين الرابع:</u>

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$

aziz_mus1@hotmail.fr

1. دراسة تغيرات الدالة g.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 - 1 - 2\ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(x - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{2(x+1)}{x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(x-1)$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدّالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

للدالة g قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ وهي $g(1) = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) \geq 0$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1 - (\ln x)^2 = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = -\infty$

2. تبيين أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

نضع $t = \sqrt{x}$ ومنه $x = t^2$ إذا كان x يئول إلى $+\infty$ فإن t يئول إلى $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(2\ln t)^2}{t^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$ لأنّ $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1-(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}=+\infty$$

3. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$

ليكن $x\in]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1+\frac{\left(-2\frac{1}{x}\ln x\right)x-\left(1-(\ln x)^2\right)}{x^2}=1+\frac{-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}=\frac{x^2-2\ln x-1+(\ln x)^2}{x^2}$$

$f'(x)=\dfrac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

4. أ ـ تبيين أنّ المستقيم (Δ) **ذا المعادلة** $y=x$ **مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **عند** $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب ـ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم** (Δ).

ليكن x عددا حقيقيا موجبا تماما

$$f(x)-x=\frac{1-(\ln x)^2}{x}=\frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x}$$

إشارة $f(x)-x$ هي من إشارة $(1-\ln x)(1+\ln x)$.

x	0		e		e^{-1}		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	|	$-$	
$1+\ln x$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين $A(e;e)$ و $B(e^{-1};e^{-1})$.

5. أ ـ تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α؛ حيث $0.3<\alpha<0.4$.

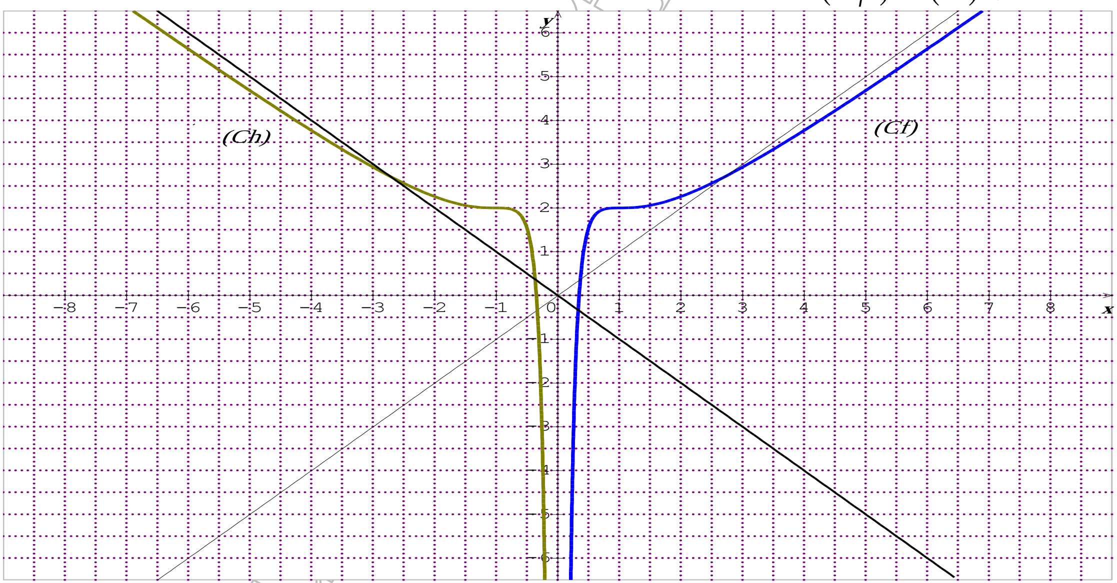
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0.3;0.4]$ ولدينا $f(0.3)\approx$ و $f(0.4)\approx$ أي $f(0.3)\times f(0.4)<0$ إذن حسب مبرهنة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3<\alpha<0.4$.

6. نعتبر الدّالة العددية h المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=f(-x)$، (C_h) تمثيلها البياني.

- **شرح كيفية رسم المنحنى (C_h) إنطلاقا من المنحنى (C_f).**

لدينا (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ب ـ الرسم (Δ) و (C_f).



الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

1– **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7.**

$2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ و $2^3\equiv1[7]$

وعليه $2^{3k}\equiv1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv2[7]$ و $2^{3k+2}\equiv4[7]$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 2^n على 7	1	2	4

2– **تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $3\times100^{3n+2}+8\times102^{3n}-104$ مضاعفا للعدد 7.**

لدينا $100\equiv2[7]$ ومنه $100^{3n+2}\equiv2^{3n+2}[7]$ ولدينا $2^{3n+2}\equiv4[7]$ إذن $100^{3n+2}\equiv4[7]$ وعليه

$3\times100^{3n+2}\equiv12[7]$ أي $3\times100^{3n+2}\equiv5[7]$.........(1)

ولدينا $102\equiv4[7]$ معناه $102\equiv2^2[7]$ ومنه $102^{3n}\equiv2^{3(2n)}[7]$ ولدينا $2^{3(2n)}\equiv1[7]$ إذن

aziz_mus1@hotmail.fr

$102^{3n} \equiv 1[7]$ و $8 \equiv 1[7]$ وعليه $8\times 102^{3n} \equiv 1[7]$.........(2)

ولدينا $104 \equiv 6[7]$.........(3) إذن $3\times 100^{3n+2} + 8\times 102^{3n} - 104 \equiv 5+1-6[7]$

أي $3\times 100^{3n+2} + 8\times 102^{3n} - 104 \equiv 0[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n العدد

$3\times 100^{3n+2} + 8\times 102^{3n} - 104$ مضاعف للعدد 7.

3– أ - هل العدد 101 أولي ؟ برّر،

لدينا $\sqrt{101} \approx 10.04$ والعدد 101 لايقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 إذن العدد 101 أولي

تعيين $PGCD(505,303)$ **.**

$505 = 303 + 202$

$303 = 202 + 101$

$202 = 2\times 101 + 0$

ومنه $PGCD(505;303) = 101$

ب - نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $505x - 303y = 1111$.....(1)

حل المعادلة (1) علما أن الحل الخاص (x_0, y_0) يحقق : $x_0 + 3y_0 = -5$.

لدينا (1) تكافئ $5x - 3y = 11$ ومنه $\begin{cases} 5x_0 - 3y_0 = 11 ....(1) \\ x_0 + 3y_0 = -5 ....(2) \end{cases}$ وبجمع المعادلتين نجد $6x_0 = 6$

أي $x_0 = 1$ وبالتعويض في (2) نجد $3y_0 = -6$ أي $y_0 = -2$ وعليه $(x_0, y_0) = (1,-2)$

حل المعادلة

$-\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 5(1) - 3(-2) = 11 \end{cases}$ ومنه $5(x-1) - 3(y+2) = 0$ أي $5(x-1) = 3(y+2)$

لدينا 3 يقسم $5(x-1)$ والعددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x-1$ ومنه

$x - 1 = 3k$ أي $x = 3k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في $5(x-1) = 3(y+2)$ نجد

$5\times 3k = 3(y+2)$ ومنه $y + 2 = 5k$ أي $y = 5k - 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

جـ - نفرض أن x و y موجبان.

4– ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1).

- تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $5x - 3y$ أي d يقسم 11 وعليه قيم d الممكنة 1 و 11.

- إيجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون $d = 11$

نضع $x = 11x'$ و $y = 11y'$ و x' و y' أوليان فيما بينهما

نحصل على $5\times 11x' - 3\times 11y' = 11$ ومنه $5x' - 3y' = 1$ نلاحظ أن $(2,3)$ حل خاص للمعادلة

ومنه $\begin{cases} 5x' - 3y' = 1 \\ 5(2) - 3(3) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد $5(x'-2) - 3(y'-3) = 0$ أي $5(x'-2) = 3(y'-3)$

لدينا 3 يقسم $5(x'-2)$ والعددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $(x'-2)$

ومنه $x' - 2 = 3\alpha$ أي $x' = 3\alpha + 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$ بالتعويض في $5(x'-2) = 3(y'-3)$ نجد

aziz_mus1@hotmail.fr

$5\times 3\alpha = 3(y'-3)$ ومنه $y'-3=5\alpha$ أي $y'=5\alpha+3$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبما أنّ $5x'-3y'=1$ فإنه حسب مبرهنة بيزو x' و y' أوليان فيما بينهما.

وبالتالي $x=11(3\alpha+2)$ أي $x=33\alpha+22$ و $y=11(5\alpha+3)$ أي $y=55\alpha+33$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

طريقة ثانية:

$d=11$ معناه $\begin{cases}11|x\\11|y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}11|3k+1\\11|5k-2\end{cases}$ أي $\begin{cases}11|6k+2\\11|5k-2\end{cases}$ وعليه $11|k+4$ ومنه $k+4=11\alpha$

أي $k=11\alpha-4$ وبالتالي $x=3(11\alpha-4)+1$ أي $x=33\alpha-11$ و $y=5(11\alpha-4)-2$

أي $y=55\alpha-22$

ومنه مجموعة الحلول هي $\{33\alpha-11;55\alpha-22\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}^*$

<u>التمرين الثاني:</u>

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(2;1;2)$ ، $B(0;2;-1)$ ، $H(1;1;0)$ والمستقيم (Δ) معرّف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases}x=-2+6t\\y=1-2t\quad;(t\in\mathbb{R})\\z=4t\end{cases}$$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (AB) لدينا $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}\ /\ \alpha\in\mathbb{R}$

ومنه $\begin{cases}x=2-2\alpha\\y=1+\alpha\quad;(\alpha\in\mathbb{R})\\z=2-3\alpha\end{cases}$

2. تبيين أنّ (AB) و(Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ شعاع توجيه لـ(AB) و $\vec{u}(6;-2;4)$ شعاع توجيه لـ(Δ).

و $\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{6}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا بالتالي المستقيمان(AB) و(Δ) غير متوازيين

نفرض أنّ (AB) و(Δ) متقاطعان إذن $\begin{cases}2-2\alpha=-2+6t........(1)\\1+\alpha=1-2t.............(2)\\2-3\alpha=4t...............(3)\end{cases}$

بضرب المعادلة (2) في العدد 2 وبجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $4=2t$ ومنه $t=2$

بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases}2-2\alpha=10\\1+\alpha=-3\\2-3\alpha=8\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-4\\\alpha=-4\\\alpha=-2\end{cases}$ تناقض

ومنه (AB) و (Δ) غير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي.

3. (P) هو المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ).

أ ـ تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;5;1)$ ناظمي للمستوي (P).

بما أنّ المستوي (P) يشمل (AB) ويوازي (Δ) فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي (P) وهما غير مرتبطين خطيا ولدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times-2+5\times1+1\times-3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1\times6+5\times-2+1\times4=0$

ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\vec{u}$ وبالتالي الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P).

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $x+5y+z+d=0$ ولدينا $A\in(P)$ يعني $2+5+2+d=0$

أي $d=-9$ وعليه $x+5y+z-9=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

جـ ـ حساب المسافة بين (P) و (Δ).

لتكن M نقطة كيفية من (Δ) إذن $M(-2+6t;1-2t;4t)$

وعليه $d(M;(P))=\dfrac{|-2+6t+5(1-2t)+4t|}{\sqrt{1^2+5^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

4. تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

$x_I=\dfrac{0+2}{2}=1$ ، $y_I=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ ، $z_I=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وعليه $I\left(1;\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

ايجاد معادلة ديكارتية للمستوي (Q)؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ويشمل النقطة I.

للمستوي (Q) معادلة من الشكل $-2x+y-3z+d=0$ ولدينا $I\in(Q)$ تعني $-2+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}+d=0$

أي $d=2$ وعليه $-2x+y-3z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MA^2-MB^2=2$.

ـ التحقق أنّ النقطة H تنتمي إلى (Γ)

لدينا $HA^2=(2-1)^2+(1-1)^2+(2-0)^2=5$ و $HB^2=(0-1)^2+(2-1)^2+(-1-0)^2=3$

ومنه $HA^2-HB^2=2$ إذن النقطة H تنتمي إلى (Γ)

استنتاج طبيعة المجموعة (Γ).

$MA^2-MB^2=2$ تعني $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=2$ وتكافئ $\overrightarrow{BA}(2\overrightarrow{MI})=2$ أي

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=1$ وتكافئ $\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HI}\right)=1$ وتكافئ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI}=1$

لدينا $H\in(\Gamma)$ ومنه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HI}=1$ وعليه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH}+1=1$ أي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MH}=0$ وبالتالي (Γ) هي المستوي الذي يشمل H و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي .

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها $z_A=i$ ، $z_B=\sqrt{2}$ ، $z_C=\sqrt{2}+i$ على الترتيب. ونسمي I، J، K منتصفات القطع $[OB]$، $[AC]$، $[CB]$ و S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I ويحول O إلى B

1- تعيين العبارة المركبة للتشابه S، ثمّ عيّن مركزه ω.

$$z_I=\frac{z_B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ ، }z_J=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\text{ و }z_K=\frac{z_C+z_B}{2}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}i$$

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z'=az+b$ ولدينا $S(A)=I$ و $S(O)=B$ يكافئ

$\begin{cases} z_I=az_A+b..........(1)\\ z_B=az_O+b.........(2)\end{cases}$ من (2) نجد $b=z_B=\sqrt{2}$ بالتعويض في (1) نجد

$a=\dfrac{z_I-b}{z_A}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ وبالتالي العبارة المركبة للتشابه S هي $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}iz+\sqrt{2}$

مركز التشابه هو النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\dfrac{3}{2}i$

2- تعيين صورة المستطيل $AOBC$ بالتشابه S.

لدينا $S(A)=I$ و $S(O)=B$

تعيين صورتي النقطتين B و C بالتشابه S.

$z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}iz_B+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}+i=z_C$ وعليه $S(B)=C$.

$z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}iz_C+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\left(\sqrt{2}+i\right)+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i=z_J$ وعليه $S(C)=J$

وبالتالي صورة المستطيل $AOBC$ هو المستطيل $IBCJ$.

3- نعتبر التحويل $S^2=S\circ S$.

أ- تعيين صورة النقط O، B، A بالتحويل S^2.

$S^2(O)=S\circ S(O)=S\left(S(O)\right)=S(B)=C$ ومنه $S^2(O)=C$

$S^2(O)=S\circ S(B)=S\left(S(B)\right)=S(C)=J$ ومنه $S^2(B)=J$

$S^2(O)=S\circ S(A)=S\left(S(A)\right)=S(I)$

aziz_mus1@hotmail.fr

تعيين صورة I بالتشابه S.

$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}iz_I+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}i=z_K$ وعليه $S(I)=K$

إذن $S^2(A)=K$.

ب - برهن أنّ S^2 تحاك يطلب تعيين عناصره.

S^2 هو تشابه مباشر نسبته $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ أي نسبته $\frac{1}{2}$ زاويته $2\times\frac{\pi}{2}$ أي زاويته π ومركزه Ω.

إذن S^2 تحاك نسبته $-\frac{1}{2}$ ومركزه Ω.

جـ - استنتج أنّ المستقيمات (OC)، (BJ)، (AK) متقاطعة.

لدينا $S^2(O)=C$ ومنه النقط O، C و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (OC).

و $S^2(B)=J$ ومنه النقط B، J و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (BJ).

و $S^2(A)=K$ ومنه النقط A، K و Ω على استقامة واحدة أي Ω تنتمي للمستقيم (AK).

إذن المستقيمات (OC)، (BJ)، (AK) متقاطعة في النقطة Ω.

<u>التمرين الرابع:</u>

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$

1. دراسة تغيّرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{2-(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $1-x$.

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)=-\infty$$

جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

2. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1-\ln 2]$ و $0\in]-\infty;1-\ln 2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.

التحقق أن $3.9<\alpha<4$.

لدينا $g(3.9)\approx 0.002$ و $g(4)\approx -0.009$ أي $g(3.9)\times g(4)<0$ ومنه $3.9<\alpha<4$.

3. تعيين، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^{2x}+1\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{e^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}}\times e^{x}=0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

2. تبيين أن: $f(x)=\frac{2x}{e^{x}}+\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{e^{x}}$، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{e^{x}}=\frac{\ln e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}{e^{x}}=\frac{\ln e^{2x}+\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^{x}}$$

$$f(x)=\frac{2x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^{x}}=\frac{2x}{e^{x}}+\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{e^{x}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x}}+\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{e^{x}}=0$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{e^{x}}=0$

3. أ - تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x؛ $f'(x)=e^{-x}g\left(e^{2x}\right)$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=-e^{-x}\ln\left(e^{2x}+1\right)+\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}e^{-x}=e^{-x}\left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-\ln\left(e^{2x}+1\right)\right)=e^{-x}g\left(e^{2x}\right)$$

ب - تعيين إشارة $f'(x)$.

إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g\left(e^{2x}\right)$.

$f'(x)=0$ تعني $g\left(e^{2x}\right)=0$ تكافئ $e^{2x}=\alpha$ وتكافئ $2x=\ln\alpha$ أي $x=\frac{\ln\alpha}{2}$

$f'(x)>0$ تعني $g\left(e^{2x}\right)<0$ تكافئ $e^{2x}<\alpha$ وتكافئ $2x<\ln\alpha$ أي $x<\dfrac{\ln\alpha}{2}$

$f'(x)<0$ تعني $g\left(e^{2x}\right)>0$ تكافئ $e^{2x}>\alpha$ وتكافئ $2x>\ln\alpha$ أي $x>\dfrac{\ln\alpha}{2}$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{\ln\alpha}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\dfrac{\ln\alpha}{2};+\infty\right[$.

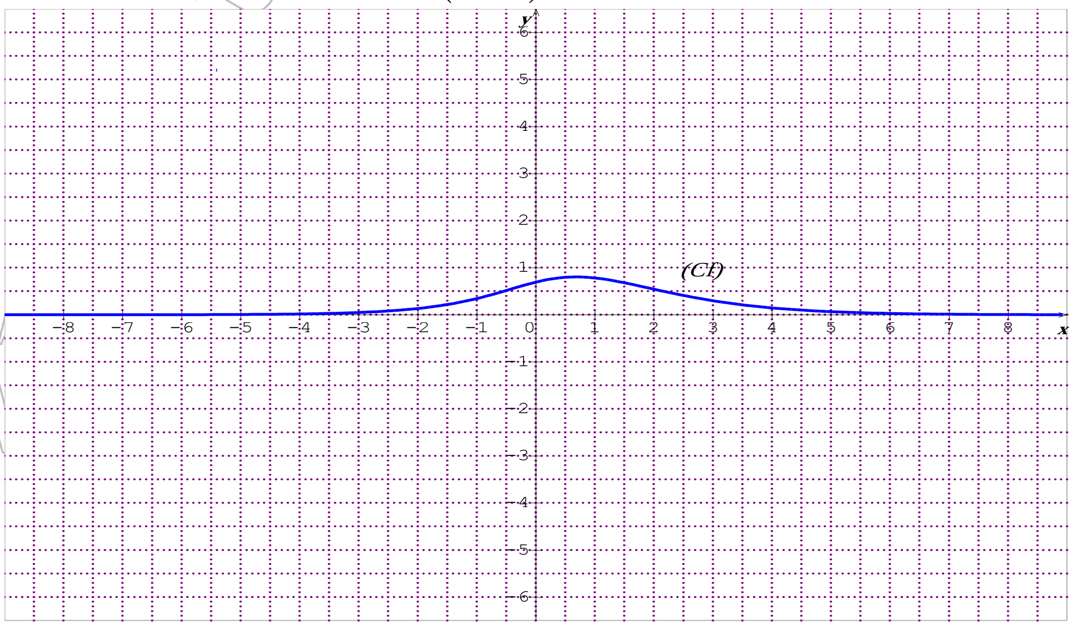
جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$	$\dfrac{\ln\alpha}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)$	↘ 0

4. تبيين أنّ $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$. **أنشئ** (C_f). **يعطى** $\dfrac{\ln\alpha}{2}\approx 0,6$ و $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)\approx 0,8$

$f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)=\dfrac{\ln\left(1+e^{2\frac{\ln\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\ln\alpha}{2}}}=\dfrac{\ln(1+\alpha)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}}=\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ معناه $\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}-\ln(\alpha+1)$

أي $\ln(\alpha+1)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}$ وعليه $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{2}\right)=\dfrac{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha+1)}=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$.



aziz_mus1@hotmail.fr