مديرية التربية لولاية الأغواط — ثانويات ولاية الأغواط – 1 –

بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي 2019

الشعبة : تقني رياضي

إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 سا و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2-2z+1=0$

2) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$

أ – أكتب كلا من العددين Z و $\overline{Z}$ على الشكل المثلثي ($\overline{Z}$ هو مرافق العدد المركب Z).

ب– نضع $L_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي.

– بين أن $L_k=\frac{1}{2^{k-1}}isin\frac{k\pi}{3}$, ثم استنتج قيمة L_{2019} .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب .

أ– علم النقطتين A ، B .

ب– عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج– عين طبيعة المثلث ABC .

د– عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\left|z-2-2i\sqrt{3}\right|=\left|z-2+2i\sqrt{3}\right|$ ،ثم أرسمها.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):\ldots\ldots 5x-6y=3$

1) أ– أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3 .

ب– استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ج– استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$

2) عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2-y^2\leq 56$

3) a و b عددان طبيعيان حيث : $a=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

– عين α و β حتى تكون الثنائية (a,b) حلا للمعادلة (E).

التمرين الثالث : (4 نقاط)

صندوق يحتوي ثلاث كرات خضراء تحمل الرقم 0 ، وكرتان حمراوان تحملان الرقم 5 وكرة واحدة بيضاء تحمل العدد α ، (α عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 5 و 10) ، كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس.

سحب لاعب ثلاث كرات في آن واحد

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : اللاعب يسحب ثلاث كرات من ألوان مختلفة.

C : اللاعب يسحب كرتين من نفس اللون .

2) اللاعب يربح بالدينار مجموع الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات " الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب".

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، وبين أن $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$.

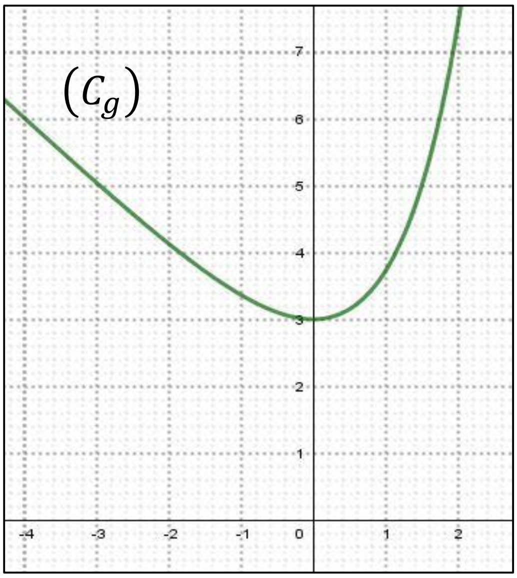
ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- احسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، وعين قيمة العدد α حتى يربح اللاعب 20 دينارا.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ae^x + b - x$ حيث a و b عددان حقيقيان ، الشكل المقابل هو التمثيل البياني لـ (C_g) ممثل للدالة g و (Δ) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .



بقراءة بيانية :

1) أ- عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- عين $g(0)$ و $g'(0)$.

ج- عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

د- عين إشارة الدالة g .

2) أ- عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = e^x + 2 - x$

ج- احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف .

د- عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f .

2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

3) أ- أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) أ- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين احداثياتها.

ب- تحقق أن : $(e^3 - 1)x - e^3y + 5 = 0$ هي معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A .

5) أرسم كل من (Δ) , (T) و (C_f).

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (**4 نقاط**)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ ، $C(0;5;1)$.

1) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3) أ- عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

ج- نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي ، عين العدد t حتى يكون $AS^2=AB^2$.

د- عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ، ثم احسب حجمه V .

التمرين الثاني : (**5 نقاط**)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E)\ ...\ (z+i)(z^2-8z+25)=0$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B ، C و D هي صور الأعداد المركبة $z_A=1$ ، $z_B=-i$، $z_C=4+3i$، $z_D=4-3i$ على الترتيب.

أ- أحسب AC و AD وقيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- أحسب z_F لاحقة النقطة F مرجح الجملة $\{(A;1),(C;-1),(D;1)\}$ ، ما طبيعة الرباعي $ACDF$.

ج- أكتب العدد $-3+3i$ على الشكل المثلثي ، ثمّ أحسب $(-3+3i)^{2019}$.

3) من أجل كلّ نقطة M تختلف عن A لاحقتها z نرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$$z'=\frac{-iz+4i-3}{z-1}$$

أ- تحقق أن : $z'+i=\dfrac{-3+3i}{z-1}$.

ب- بيّن أن : $AM\times BM'=3\sqrt{2}$ و $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

4) أ- النقطة D هي صورة النقطة E بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -3 ، عين z_E لاحقة النقطة E .

ب- عين مركز وزاوية الدوران $\mathcal{R}$ الذي يحول E إلى B ويحوّل D إلى C .

ج- ما طبيعة التحويل $\mathrm{h}\circ\mathcal{R}$؟ *حدّد عناصره المميزة.*

التمرين الثالث : (4 نقاط)

I. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المتتالية (U_n) حيث :
$$\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n} \end{cases}$$

1) أحسب U_2 و U_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $U_n > \frac{1}{e}$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ، ثم استنتج تقارب المتتالية (U_n) .

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :
$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}lnU_n$$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1 .

2) عبّر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج أن : $U_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

3) أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

4) أحسب الجداء $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - lnx^2) + 1 \quad ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (وحدة الطول $2cm$).

I. 1- أحسب نهاية f عند $+\infty$.

2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $4.6 < \alpha < 4.7$.

5- أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II. g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' واستنتج إشارتها على المجال $[0; +\infty[$.

2- حدد إتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

3- أنشئ (D) و (C_f) .

III. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2lnx \ dx$

1- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (D) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$.

3- أحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$.

تصحيح الموضوع الأول

التمرين 01 — **4**

0.5 1) حلول المعادلة : $\Delta=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ و $z_1=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $z_2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$

0.5 2) أ– الشكل المثلثي : $Z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ، $\overline{Z}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ب– لدينا : $L_k=Z^k-\overline{Z}^k$ أي

$$L_k=\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^k-\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^k$$

ومنه :

$$L_k=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right)-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)\right)\right)$$

وبما أن : $\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)=\cos\frac{k\pi}{3}$ و $\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)=-\sin\frac{k\pi}{3}$

0.5 ينتج : $L_k=2\times\frac{1}{2^k}i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

– **تعيين قيمة L_{2019}** :

0.5

$$L_{2019}=\frac{1}{2^{2018}}i\sin\left(\frac{2019\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^{2018}}\times 0=0$$

0.5 3) أ– تعليم النقطتين A و B .

ب– **لاحقة z_C** : لدينا : $z_C-z_A=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_B-z_A)$ بعد التعويض :

$$z_C=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-4i\sqrt{3}\right)+2+2i\sqrt{3}$$

0.5 $z_C=8$

ج– **طبيعة المثلث (ABC)** :

0.5 لدينا $\mathcal{R}(B)=C$ معناه $AB=AC$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ وبالتالي المثلث متقايس الأضلاع.

د– **تعيين مجموعة النقط** :

0.5 لدينا : $|z-z_A|=|z-z_B|$ أي $AM=BM$ إذن (Γ) هي محور $[AB]$.

التمرين 02 — **4**

0.5 1) أ– **إثبات أنه اذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف ل 3** :

اذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة فإن $5x-6y=3$ ومنه $5x=6y+3=3(y+2)$

ومنه (حسب غوص) $3|5x$ وكذلك 5 و 3 أوليان فيما بينهما ، إذن $3|x$ أي $x=3k$.

ب– **استنتاج حل خاص (x_0,y_0) للمعادلة (E)** :

0.5 لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافئ (x_0,y_0) حل للمعادلة (E)) معناه : $5x_0-6y_0=3$

0.5 أي $5(3k)-6y_0=3$ أي $5(k)-2y_0=1$

وباستعمال خوارزمية اقليدس نجد : $(k,y_0)=(1,2)$ إذن $(x_0,y_0)=(3,2)$.

ج– **حل المعادلة (E)** :

0.5 لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي :

0.5 $5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيما بينهما و منه $6|(x-3)$ إذن

$x=6k+3$ ، وبتعويض قيمة x نجد : $y=5k+2$

الحلول : $(6k+3;5k+2)$

استنتاج حلول المعادلة (S) :

0.5

(S) تكافئ : $\begin{cases} x = 6\alpha - 1 \\ x = 5\beta - 4 \end{cases}$ ومنه $6\alpha - 1 = 5\beta - 4$ إذن $5\beta - 6\alpha = 3$ وحسب السؤال 1)ب-

$(\alpha;\beta) = (6k+3; 5k+2)$ وبالتعويض في نجد : $x = 30k + 11$.

2) حلول المعادلة (E) علما أن $x^2 - y^2 \leq 56$:

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) معناه $(6k+3)^2 - (5k+2)^2 \leq 56$ تكافئ

0.5

$11k^2 + 16k - 51 \leq 0$ وحل هذه المتراجحة هو $k \epsilon \left[-3; \frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k = \{-3;-2;-1;0;1\}$

ومنه الثنائيات هي :

$$(x;y) = \{(-15;-13),(-9;-8),(-3;-3),(3;2),(9;7)\}$$

3) تعيين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $\alpha = \overline{1\alpha0\alpha00}^{3}$ فإن $0 \leq \alpha < 3$ و $b = \overline{\alpha\beta0\alpha}^{5}$ فإن $0 \leq \beta < 5$ ولدينا كذلك :

0.5

$$a = 3^2 \times \alpha + 3^3 \times \alpha + 3^5 = 90\alpha + 243$$
$$b = 5^0 \times \alpha + 5^2 \times \beta + \alpha \times 5^3 = 126\alpha + 25\beta$$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافئ $5a - 6b = 3$ ومنه :

$$5(90\alpha + 243) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$$

بعد التبسيط نجد : $51\alpha + 25\beta = 202$ وبما أن : $0 \leq \alpha < 3$ فإن : $\alpha = \{0;1;2\}$

ينتج : $\beta = \left\{\frac{202}{25} \text{ و } \frac{151}{25}; \frac{100}{25} = 4\right\}$

إذن : $(\alpha;\beta) = (2;4)$

التمرين 03

5

الكيس يحتوي الكرات التالية : $\Omega = \{V_0, V_0, V_0, R_5, R_5, B_\alpha,\}$

عدد الإمكانيات : $C_6^3 = 20$

1) أ- احتمال الحادثة A :

0.5

V_0	V_0	V_0

$$P(A) = \frac{C_3^3}{20} = \frac{1}{20}$$

ب- احتمال الحادثة B :

0.5

V_0	R_5	B_α

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{20} = \frac{6}{20}$$

ج- احتمال الحادثة C :

0.5

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{13}{20}$$

2) أ – قيم المتغير العشوائي X :

0.75

$X = 0$ ⟶ $V_0 \mid V_0 \mid V_0$ ⟶ $C_3^3 = 1$

$X = 5$ ⟶ $V_0 \mid V_0 \mid R_5$ ⟶ $C_3^2 \times C_2^1 = 6$

$X = 10$ ⟶ $V_0 \mid R_5 \mid R_5$ ⟶ $C_3^1 \times C_2^2 = 3$

0.75

$X = \alpha$	$V_0 \; V_0 \; B_\alpha$	$C_3^2 \times C_1^1 = 3$
$X = \alpha + 5$	$V_0 \; R_5 \; B_\alpha$	$C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 6$
$X = \alpha + 10$	$R_5 \; R_5 \; B_\alpha$	$C_2^2 \times C_1^1 = 1$

0.5

– احتمال $P(X=\alpha)$ معناه الحصول على كرة تحمل العدد α و كرتين خضراوين تحملان الرقم 0.

إذن : $P(X=\alpha) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{20} = \frac{3}{20}$

0.5

ب– قانون الاحتمال :

$X =$	0	5	10	α	$\alpha+5$	$\alpha+10$
$P(X) =$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

ج– الأمل الرياضي :

0.5

$$E(x) = \sum p_i x_i = \frac{10\alpha + 100}{20}$$

– **قيمة α حتى يربح اللاعب 20 دينار :**

0.5

معناه : $E(x) = 20$ أي $\frac{10\alpha+100}{20} = 20$ ومنه $\alpha = 30$

التمرين 04

.I القراءة البيانية

0.25

أ) **حساب النهايات :** $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

0.25

ب) $g(0) = 3$ و $g'(0) = 0$. (لدينا مماس أفقي يوازي حامل محور الفواصل).

ج) إتجاه التغير :

0.25

– على المجال $]-\infty; 0[$ الدالة متناقصة تماما.

– على المجال $]0; +\infty[$ الدالة متزايدة تماما.

جدول التغيرات :

0.25

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

د) تعيين إشارة الدالة g :

0.25

نلاحظ أن $g(x) \geq 3 > 0$ ومنه g موجبة تماماً على $\mathbb{R}$.

2) أ– تعيين $g'(x)$ بدلالة a و b :

0.5

$$g'(x) = ae^x - 1$$

ب– بيان عبارة $g(x)$:

0.5

لدينا : $\begin{cases} g(0) = 3 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} ae^0 + b - 0 = 3 \\ ae^0 - 1 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

0.5 ج- حساب نهايات الدالة $g(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

0.5 د- اتجاه التغير وجدول التغيرات للدالة $g(x)$:

$g'(x) = e^x - 1$ ومنه المشتقة تنعدم عند $x = 0$ إذن :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

II. 1) إثبات أن $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$:

0.5 لدينا : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ ومنه $f'(x) = 1 + 2e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^x + 2 - x)$

2) دراسة تغيرات الدالة $f(x)$:

- النهايات : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x + (x-1)e^{-x}] = -\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x + (x-1)e^{-x}] = +\infty + 0 = +\infty$

- 0.5 إشارة المشتقة f' :

لدينا $g(x) > 0$ و $e^{-x} > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) مبرهنة القيم المتوسطة :

0.5 f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ و لدينا $f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \times 0.2 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

3) أ – اثبات أن المستقيم $y = x$ مقارب مائل :

0.25 لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} x + (x-1)e^{-x} - x = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{-x} = 0$

ومنه $y = x$ خط مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ب- الوضعية النسبية ل (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة $f(x) - y$ حيث : $f(x) - y = (x-1)e^{-x}$ أي ندرس إشارة $x - 1$.

0.5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$		$+$	
		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

4) أ– اثبات وجود نقطة الانعطاف :

لدينا : $f''(x) = e^{-x}(x-3)$ وبوضع $f''(x) = 0$ نجد $x = 3$ ولدينا :

0.5

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	|	$+$

ومنه $f(3) = 3 + 2e^{-3}$

إذن احداثيات نقطة الانعطاف هي $A(3;3+2e^{-3})$.

ب– التحقق من معادلة المماس :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3)$$

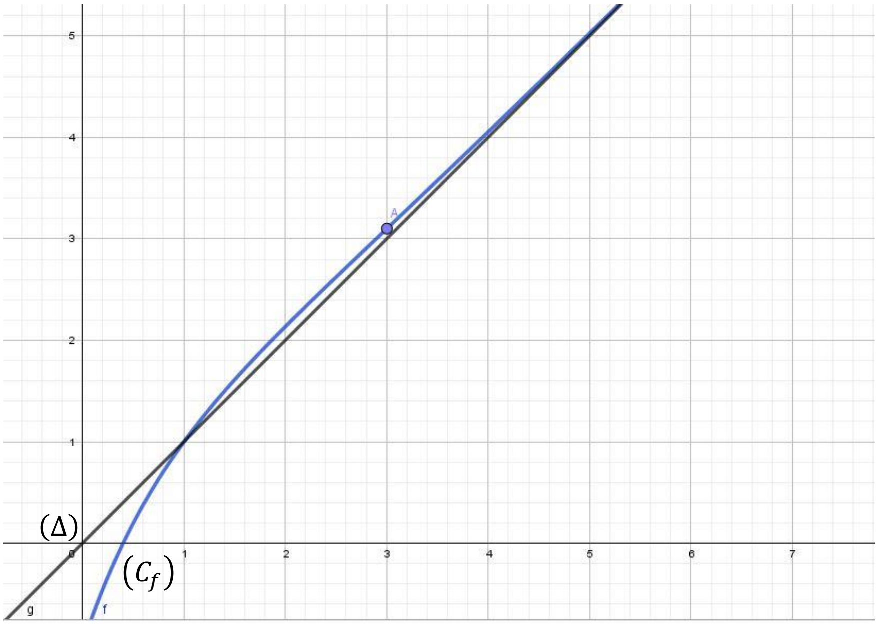
0.5

$$y = (1-e^{-3})x - 3(1-e^{-3}) + 3 + 2e^{-3}$$

بعد التبسيط نجد : $(e^3-1)x - e^3y + 5 = 0$

5) التمثيل البياني :

0.5



تصحيح الموضوع الثاني

التمرين 01 (4)

1) المثلث ABC متقايس الأضلاع : لأن $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$ — 0.5

2) بيان أن $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) : — 0.5

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0(1) + 3(1) + 3(-1) = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n} = -3(1) + 3(1) + 0(-1) = 0 \end{cases}$$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذن $\vec{n}$ عمودي المستوي (ABC).

– استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) : — 0.5

$$(x-0) + (y-5) - (z-1) = 0$$

وأخيراً معادلة (ABC) هي : $x + y - z - 4 = 0$

3) أ– مركز ثقل المثلث (ABC) : — 0.5

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$$G(2,4,2)$$

ب– التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) : — 0.5

المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) معني أنه يمكن اعتبار الشعاع الناظمي $\vec{n}(1;1;-1)$ كشعاع توجيه للمستقيم (Δ) ونكتب

$$(\Delta)\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t\epsilon\mathbb{R}$$

ج– تعيين العدد t : — 0.5

نلاحظ أن S نقطة من المستقيم (Δ). و $AS^2 = AB^2$ يكافئ

$$(t-1)^2 + (t+2)^2 + (1-t)^2 = 18$$

أي $3t^2 + 6 = 18$ ومنه $S\{-2;2\}$

ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$

د– طبيعة الرباعي $FABC$: — 0.5

لدينا F تنتمي إلى المستقيم (Δ) ومنه المثلثات FGA ، FGB ، FGC قائمة ومتقايسة لأن $GA = GB = GC$ إذن $FABC$ رباعي وجوه منتظم.

– حجم الرباعي : $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \times FG = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — 0.5

$FG = 2\sqrt{3}$

$V = 9\, u.v$

التمرين 02 (5)

1) حل المعادلة : $z_1 = -i$ و $\Delta = -36 = (6i)^2$ ، $z_2 = 4 - 3i$ ، $z_3 = 4 + 3i$ — 0.75

2) أ–

$z_{AC} = z_C - z_A = 3 + 3i$ ومنه $AC = 3\sqrt{2}$ — 0.75

$z_{AD} = z_D - z_A = 3 - 3i$ ومنه $AD = 3\sqrt{2}$

ولدينا : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

ومنه المثلث ACD قائم في A ومتساوي الساقين. — 0.25

ب– لاحقة F مرجح الجملة :

$$z_F = \frac{z_A + z_D - z_C}{1} = 1 - 6i$$ — 0.25

– طبيعة الرباعي : لدينا $z_F = z_A + z_D - z_C$ معناه $z_F - z_D = z_A - z_C$ أي $z_{\overrightarrow{FD}} = z_{\overrightarrow{CA}}$ ومنه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ ومنه الرباعي $ACDF$ متوازي أضلاع. — 0.25

ج– الشكل المثلثي : $-3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\, sin\frac{3\pi}{4}\right)$ — 0.25

– حساب قيمة العدد $(-3+3i)^{2019}$:

$$(-3+3i)^{2019} = (3\sqrt{2})^{2019}\left(cos\frac{2019 \times 3\pi}{4} + i\, sin\frac{2019 \times 3\pi}{4}\right)$$

0.5

$$=\left(3\sqrt{2}\right)^{2019}(cos\pi+isin\pi)=-\left(3\sqrt{2}\right)^{2019}$$

3) التحقق :

0.25

$$z'+i=\frac{-iz+4i-3}{z-1}+i\frac{z-1}{z-1}=\frac{-3+3i}{z-1}$$

ب– بيان أن $\boldsymbol{MA\times M'B=3\sqrt{2}}$:

$z'+i=\frac{-3+3i}{z-1}$ يكافئ $(z'+i)(z-1)=-3+3i$ ومنه

0.25

$|z'+i|\times|z-1|=|-3+3i\,|=3\sqrt{2}$ إذن $MA\times M'B=3\sqrt{2}$.

– بيان أن $\boldsymbol{\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$:

لدينا $(z'+i)(z-1)=-3+3i$ ومنه

$$arg[(z'+i)(z-1)]=arg[-3+3i]=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

أي $arg[(z'+i)]+arg[(z-1)]=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

أي $arg\left[\left(z'-(-i)\right)\right]+arg\left[\left(z-(1)\right)\right]=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

0.5

إذن $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

4) أ– تعيين لاحقة النقطة $\boldsymbol{E}$:

0.25

لدينا $h(E)=D$ معناه $z_D-z_A=-3(z_E-z_A)$ بالتعويض نجد : $z_E=i$

ب– تعيين مركز وزاوية الدوران $\boldsymbol{\mathcal{R}}$:

$$(\mathcal{R}):z'=az+b$$

نعلم أن : $a=\frac{z_B-z_C}{z_E-z_D}=\frac{-i-4-3i}{i-4+3i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $b=z_B-az_E=1-i$

0.25

إذن : $z_A=1=\frac{b}{1-a}=z_\omega$ ، الدوران $\mathcal{R}$ مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج– طبيعة التحويل $\boldsymbol{h\circ\mathcal{R}}$

0.5

هو مركب تحاكي ودوران اذن هو تشابه مباشر مركزه A ونسبته 3 وزاويته $\frac{3\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{2}$.

التمرين 03

4

0.5

1) **حساب الحدود** : $U_2=e^{\frac{1}{2}}$ ، $U_3=e^{-\frac{1}{4}}$.

2) **اثبات أن من أجل كل عدد طبيعي** $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}^*}$: $\boldsymbol{U_n<\frac{1}{e}}$ (البرهان بالتراجع)

التحقق : $n=1$ لدينا $U_1=e^2<\frac{1}{e}$ (محققة)

نفرض أنه أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ الخاصية $U_n<\frac{1}{e}$ ، ونبرهن أنه أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ الخاصية $U_{n+1}<\frac{1}{e}$:

0.5

$$U_n<\frac{1}{e}$$

$$\sqrt{U_n}<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n}<e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-1}$$

$$U_{n+1}<\frac{1}{e}$$

ومنه الفرضية صحيحة.

3) **البرهان أن** $\boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n}<1}$:

0.5

لدينا : $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n}}{U_n}$ أي $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{U_n}}$

من السؤال 2) لدينا : $U_n<\frac{1}{e}$ أي $\sqrt{U_n}<\frac{1}{\sqrt{e}}$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{U_n}}>\sqrt{e}$.

ينتج لدينا :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{U_n}}<e^{-1}\sqrt{e}=1$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$$

– **استنتاج التقارب :**

0.5

من السؤال 2) لدينا $U_n<\frac{1}{e}$ أي (U_n) محدودة من الأسفل.

من السؤال 3) لدينا $\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$ لدينا $U_{n+1}<U_n$ ومنه (U_n) متناقصة تماما.

نستنتج حسب المبرهنة أن (U_n) متقاربة .

II. 1) إثبات أن (v_n) هندسية :

0.5

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}lnU_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln\left(\frac{U_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}ln\frac{U_n}{e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}lnU_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{3}{2}$.

0.5

2) عبارة (v_n) : $v_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

عبارة (U_n) :

$$U_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$$

0.5

3) حساب نهاية (U_n) : $\lim_{n\to+\infty}U_n=e^{-1}=\frac{1}{e}$

4) حساب الجداء P_n :

0.5

$$P_n=U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$$
$$=e^{6\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$$
$$=e^{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$$

التمرين 04

7

0.25

I. **1) حساب نهاية الدالة f :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

II. دراسة قابلية إشتقاق f عند 0 :

0.5

من الواضح أن الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0.

لندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{1}{2}x^2(3-lnx^2)+1-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{2}x(3-2lnx)=0$$

0.5

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(1;0)$.

III. دراسة إتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتقة : $f'(x)=x(3-2lnx)+\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x(1-lnx)$

0.5

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-lnx)$ لأن $2x>0$.

– الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;e[$.

– الدالة f متناقصة على المجال $]e;+\infty[$.

جدول التغيرات :

0.5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2+1$	$\searrow$	$-\infty$

II. تبيان أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha\geq 0$ بحيث $f(\alpha)=0$:

0.5

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $]e;+\infty[$ ، و

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\times f(e)=-\infty\times\left(\frac{1}{2}e^2+1\right)=-\infty<0$$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $\alpha\geq 0$.

0.5 التحقق أن $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$:

لدينا : $f(4.7) \times f(4.6) < 0$

5) معادلة المماس (D) :

$$(D): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

0.5
$$y = 2x + \frac{1}{2}$$

II. 1) حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

$g'(x) = f'(x) - 2$ و $g'(x) = 2x(1 - lnx) - 2$

0.5
$$g''(x) = -2lnx$$

– دراسة اتجاه التغير :

$g''(x) \geq 0$ يكافئ $-2lnx \geq 0$ يكافئ $lnx \leq 0$ يكافئ $0 < x < 1$ إذن الدالة g' متزايدة تماماً على المجال $]0;1]$.

0.5 $g''(x) < 0$ يكافئ $-2lnx < 0$ يكافئ $lnx < 0$ يكافئ $x < 1$ ، إذن الدالة g' متناقصة تماماً على $[1;+\infty[$.

– جدول تغيرات g' :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

– إشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$:

0.5 من جدول تغيرات الدالة g' نجد من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) \leq 0$

2) تحديد إتجاه تغير الدالة f :

0.5 لدينا من السؤال 1) $g'(x) \leq 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]0;+\infty[$.

– جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	
$g(x)$	1	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

– استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) :

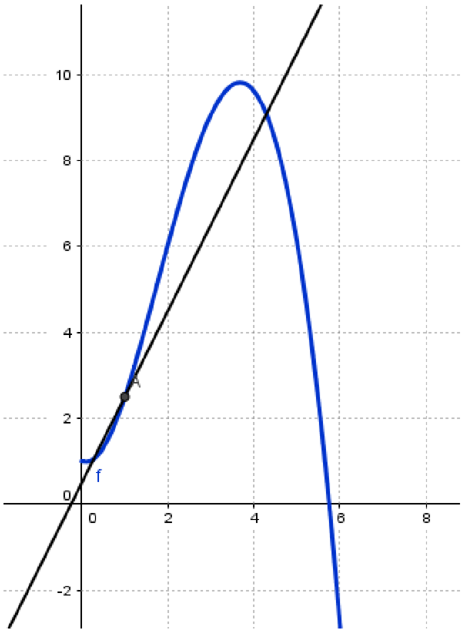
يعود إلى دراسة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ أي إشارة $g(x)$.

من جدول التغيرات نجد $g(x) \geq 0$ من أجل $x \in]0;1]$ و $g(x) \leq 0$ من أجل $x \in]1;+\infty[$.

0.5

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (D)	تقاطع	(C_f) تحت (D)	

0.5



3) إنشاء (C_f) و (D) :

III. 1) حساب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة :

لدينا : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\, lnx\, dx$ و نضع : $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = lnx \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

اذن :

0.25

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\, lnx\, dx = \left[\frac{x^3}{3} lnx\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3n^2}\left(\frac{1}{3} + ln(n)\right) - \frac{1}{9}$$

2) استنتاج المساحة $A(n)$:

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

0.25

$$= \left(-\frac{11}{18n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) + \frac{1}{9}\right) \times 4cm^2$$

– حساب نهاية $A(n)$:

0.25

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = \frac{4}{9}$$