اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 ساعات ونصف

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1)أ/ احسب كل من u_1، u_2 وَ u_3.

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ:0.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ احسب $P(A)$ وَ $P(C)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

– عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"، أحسب $P(D)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.

ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.

أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \cdots + 5 + 2^n$.

ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

1) احسب نهايتي الدّالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

1) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2)أ- أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3)أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f).

جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

4)أ- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

ب- ارسم (D) و (C_f).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، مثّل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ وَ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

أ- مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D).

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$، أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$، ثمّ استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x - y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) ما هي قيم المتغيّر العشوائي X؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: (E) ... $4862x - 1430y = 2002$ حيث x و y عدادان صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 وَ2002.

2)أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)، نضع: $d = PGCD(a;b)$.

أ. عيّن القيم الممكنة لـd.

ب. عيّن الثنائيات $(a;b)$ عندما $d = 7$.

اقلب الصفحة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل:

لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$

نسمي (C) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$).

1)أ- احسب نهاية الدّالة f عند 0، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D).

2)أ- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3)أ- عيّن إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D).

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e. (نُذكّر أنّ e هو العدد الذي يُحقق $\ln e=1$)

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) ارسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C).

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة تقني رياضي 2021

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (05 **نقاط**)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$.

1)أ/ حساب كل من u_1، u_2 وَ u_3:

لدينا: $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

وَ $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12}$

وَ $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48}$

ب/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

نلاحظ أنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) فهي **متزايدة تماما**.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ حساب حدّها الأوّل:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$، تُكافئ: $\alpha u_{n+1} - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $\alpha\left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}\left(\alpha u_n - 4(\alpha+1)\right)$

وعليه: $\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$

ومنه: $\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$

وعليه: $4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$

ويكون: $-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$

وبالتالي: $\boxed{\alpha = 3}$، (بالتعويض نجد: $v_n = 3u_n - 16$)

حساب الحدّ الأوّل:

$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$

ب/ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$:

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases}$،

ومنه:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{v_n + 16}{3} \\ &= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3} \\ &= \frac{16}{3} + \frac{-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0 \end{aligned}$$

إذن: (u_n) **متزايدة تماما**.

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{16}{3}}$.

3) كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ حساب $\lim_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n) \\ &= -4[1(n - 0 + 1)] \\ &= -4n - 4 \end{aligned}$$

حساب $\lim_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(-4n - 4) = +\infty$$

حل التمرين الثاني: (04 **نقاط**)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها **أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2** و**ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2** و**كريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1** و**كرية وسوداء مرقمة بـ:0**.

عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا الصندوق هو: $\boxed{C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210}$.

نعتبر الأحداث A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) تبيان أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ حساب $P(A)$ وَ $P(C)$:

لدينا:

$$P(B)=\frac{C_4^1\times C_3^3+C_4^2\times C_3^2+C_4^3\times C_3^1+C_4^2\times C_2^2+C_4^3\times C_2^1+C_4^3\times C_1^1+C_3^2\times C_2^2+C_3^3\times C_2^1+C_3^3\times C_1^1}{C_{10}^4}$$
$$=\frac{4\times1+6\times3+4\times3+6\times1+4\times2+4\times1+3\times1+1\times2+1\times1}{210}$$
$$=\frac{58}{210}$$
$$=\frac{29}{105}$$

<u>حساب</u> $P(A)$ <u>وَ</u> $P(C)$:

<u>لدينا:</u> $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{4\times3\times2\times1}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

<u>وَ</u> $P(C)=\frac{C_6^1\times C_4^3+C_6^2\times C_4^2+C_6^3\times C_4^1+C_6^4}{C_{10}^4}$
$$=\frac{6\times4+15\times6+20\times4+15}{210}$$
$$=\frac{205}{201}$$
$$=\frac{41}{57}$$

2) **<u>لدينا:</u>** X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

<u>تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي</u> $E(X)$:

- قيم المتغيّر العشوائي X هي: 1، 2، 3، 4.
- $X=1$، <u>معناه:</u> "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

<u>ومنه:</u> $\boxed{P(X=1)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}}$.

$X=2$، <u>معناه:</u> "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

<u>ومنه:</u> $\boxed{P(X=1)=P(B)=\frac{58}{210}}$.

$X=4$، <u>معناه:</u> "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

<u>ومنه:</u> $\boxed{P(X=1)=P(A)=\frac{24}{210}}$.

$X=3$، <u>معناه:</u> "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"،

<u>ومنه:</u> $\boxed{P(X=3)=1-\left(\frac{1}{210}+\frac{58}{210}+\frac{24}{210}\right)=\frac{127}{210}}$.

<u>نُلخص النتائج في الجدول التالي:</u>

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

<u>حساب الأمل الرياضياتي</u> $E(X)$:

<u>لدينا:</u> $E(X)=1\times\frac{1}{210}+2\times\frac{58}{210}+3\times\frac{127}{210}+4\times\frac{24}{210}$
$$=\frac{1+116+381+96}{210}$$
$$=\frac{594}{210}$$
$$=\frac{99}{35}$$

3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق <u>هو:</u>

$$\boxed{A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=5040}$$

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

<u>حساب</u> $P(D)$:

<u>لدينا:</u> $\boxed{P(D)=\frac{4\times3\times3\times2}{5040}=\frac{72}{5040}=\frac{1}{70}}$.

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

<u>1)أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10:</u>

<u>لدينا:</u> $2^0\equiv\mathbf{1}[10]$،
$2^1\equiv\mathbf{2}[10]$،
$2^2\equiv\mathbf{4}[10]$،
$2^3\equiv\mathbf{8}[10]$،
$2^4\equiv\mathbf{6}[10]$،
$2^5\equiv\mathbf{2}[10]$،

<u>ومنه:</u> بواقي قسمة 2^n على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 <u>وبالتالي:</u>

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$k\in\mathbb{N}^*$
$2^n\equiv$	2	4	8	6	[10]

<u>ب. استنتاج رقم أحاد العدد 1994^{1414}:</u>

<u>لدينا:</u> $1994\equiv4[10]$ <u>أي:</u> $1994\equiv2^2[10]$

<u>ومنه:</u> $1994^{1414}\equiv2^{2828}[10]$

<u>وبمأنّ:</u> $2828=5(565)+3$، <u>فإنّ:</u>

$$\boxed{1994^{1414}\equiv6[10]}$$

<u>إذن:</u> رقم أحاد العدد 1994^{1414} هو 6.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n=2^n$.

<u>أ. التحقق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:</u>

<u>لدينا:</u> $u_{n+1}=2^{n+1}=2\times2^n=2u_n$،

<u>إذن:</u> (u_n) متتالية هندسية.

ب. <u>لدينا:</u> من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$S_n=5+2^1+5+2^2+\cdots+5+2^n$.

<u>إيجاد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10:</u>

<u>أولا نكتب S_n بدلالة n:</u>

$$S_n=(5+2^1)+(5+2^2)+\cdots+(5+2^n)$$
$$=5(n-1+1)+(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$
$$=5n+u_1\left(\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}\right)$$
$$=5n+2\left(\frac{1-2^n}{-1}\right)$$
$$=5n+2(2^n-1)$$

S_n يقبل القسمة على 10، <u>معناه:</u> $S_n\equiv0[10]$

<u>أي:</u> $5n+2(2^n-1)\equiv0[10]$

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$k\in\mathbb{N}^*$
$2^n\equiv$	2	4	8	6	[10]
$5n\equiv$	5	0	5	0	[10]
$S_n\equiv$	7	6	9	0	[10]

<u>إذن:</u> $\boxed{n=5k+3}$، (حيث $k\in\mathbb{N}^*$)

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x+x+1$.

1) حساب نهايتي الدّالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$.

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=e^x+1>0}$،

ومنه: الدّالة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28<\alpha<-1,27$:

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,28;-1,27[$

(لأنّها: متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases}g(-1,28)\simeq-0,56\\ g(-1,27)\simeq+0,01\end{cases}$، أي: $g(-1,28)\times g(-1,27)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28<\alpha<-1,27$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

بمأنّ: g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $g(\alpha)=0$، فإنّ:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

1) إثبات أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(xe^x)'(e^x+1)-(e^x+1)'(xe^x)}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{(1\times e^x+e^x\times x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{e^x(x+1)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{e^x(xe^x+x+e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^xg(x)}{(e^x+1)^2}\end{aligned}$$

2)أ- إثبات أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$:

لدينا: من السؤال (I-3)، $g(\alpha)=0$

أي: $e^\alpha+\alpha+1=0$ ومنه: $e^\alpha=-\alpha-1$

وبالتعويض نجد:

$\boxed{f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}=\alpha+1}$.

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,28<\alpha<-1,27$

ومنه: $-0,28<\alpha+1<-0,27$

إذن: $\boxed{-0,28<f(\alpha)<-0,27}$.

3)أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}=\frac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

نعلم أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$ نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=+\infty$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

ب- تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x)-x=\frac{-x}{e^x+1}=\frac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$

وبمأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ، فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}\right)=0$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{e^x+1}\right)=+\infty$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$.

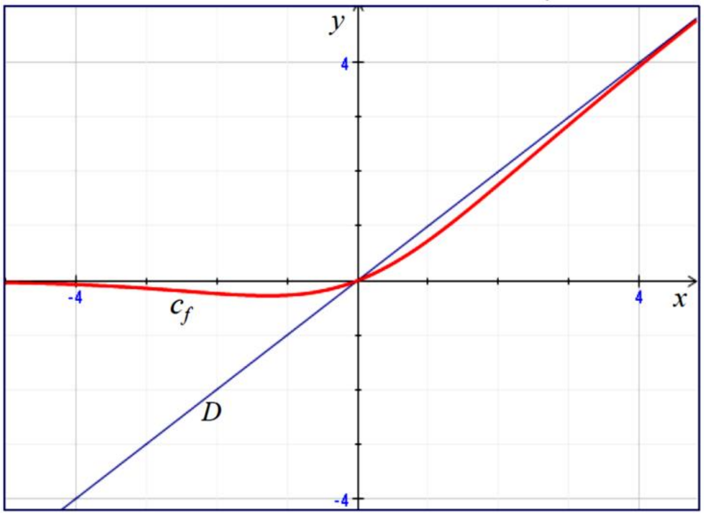
لدينا: $f(x)-x=\frac{-x}{e^x+1}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $(-x)$ على $\mathbb{R}$، وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$f(x)-x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4)أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\alpha+1$	$\nearrow$	$+\infty$

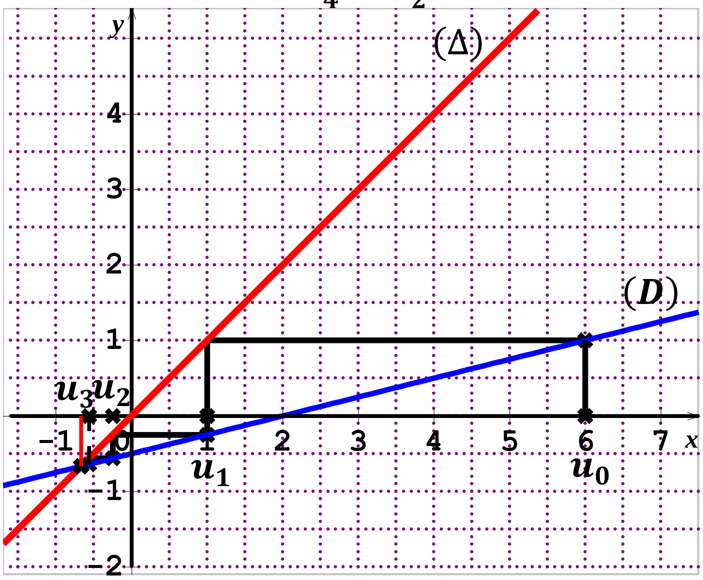
ب- رسم (D) و (C_f):



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، **تمثيل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب $y=x$ وَ $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$:**



لدينا: $\begin{cases} u_0=6 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2} \end{cases}$.

أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها):

ب- تعيين احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D):

نحل المعادلة $x=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$، ومنه: $4x=x-2$

وعليه: $x=-\frac{2}{3}$،

إذن: (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة إحداثييها $\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

جـ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أنّ: $u_0>u_1>u_2>u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها فهي **متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد $-\frac{2}{3}$**.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل:

⮌ لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}+\alpha \\ &= \frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}+\alpha \\ &= \frac{1}{4}(v_n-\alpha)-\frac{1}{2}+\alpha \\ &= \frac{1}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha \end{aligned}$$

⮌ تكون (v_n) متتالية هندسية،

إذا وفقط إذا كان: $-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha=0$

ومنه: $-\alpha-2+4\alpha=0$

وعليه: $3\alpha=2$

وبالتالي: $\boxed{\alpha=\frac{2}{3}}$، (بالتعويض نجد: $v_n=u_n+\frac{2}{3}$)

إذن: في حالة $\alpha=\frac{2}{3}$، تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأوّل $v_0=u_0+\frac{2}{3}=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$.

ب- نضع $\alpha=\frac{2}{3}$، **كتابة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:**

لدينا: $\boxed{v_n=v_0\times q^n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$،

ومنه: $\boxed{u_n=v_n-\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}}$.

جـ تبيان أنّ $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}-\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3} \\ &= \frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}-1\right) \\ &= \frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{-3}{4}\right) \\ &= -5\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بما أنّ: $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n<0$،

فإنّ: (u_n) **متناقصة تماما**.

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}}$.

د-حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

لدينا:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
$$= v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$$
$$= \frac{20}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= \frac{20}{3}\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

استنتاج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

لدينا:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
$$= \left(v_0 - \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{2}{3}\right)$$
$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \frac{2}{3}(n-0+1)$$
$$= S_n - \frac{2}{3}(n+1)$$
$$= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{2}{3}(n+1)$$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، **أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.**

عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين في آن واحد من هذا الكيس هو: $\boxed{C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28}$.

1/ حساب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي:

ليكن الحدث A: "سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي"

ومنه: $\boxed{P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}}$.

2/ حساب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي:

ليكن الحدث B: "سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي"

ومنه: $\boxed{P(B) = \frac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}}$.

3/ لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) قيم المتغيّر العشوائي X هي: 0، 1، 3، وَ 4.

ب) تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- $X = 0$، معناه: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم (الكريتين تحملان الرقم 1 **أو** تحملان الرقم 2)"

ومنه: $\boxed{P(X=0) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28}}$.

$X = 1$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 2"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = \frac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2} = \frac{4\times 3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}}$.

$X = 3$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 2 وَالأخرى تحمل الرقم 5"

ومنه: $\boxed{P(X=3) = \frac{C_3^1\times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3\times 1}{28} = \frac{3}{28}}$.

$X = 4$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 5"،

ومنه: $\boxed{P(X=4) = \frac{C_4^1\times C_1^1}{C_8^2} = \frac{4\times 1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $E(X) = 0\times\frac{9}{28} + 1\times\frac{12}{28} + 3\times\frac{3}{28} + 4\times\frac{4}{28}$

$$= \frac{0+12+9+16}{28}$$
$$= \frac{37}{28}$$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا المعادلة: $4862x - 1430y = 2002 \dots (E)$

حيث x و y عدادان صحيحان.

1) حساب القاسم المشترك الأكبر للأعداد 4862، 1430 وَ2002:

لدينا: $\begin{cases} 4862 = 2\times 11\times 13\times 17 \\ 1430 = 2\times 5\times 11\times 13 \\ 2002 = 2\times 7\times 11\times 13 \end{cases}$، ومنه:

$\boxed{PGCD(4862; 1430; 2002) = 2\times 11\times 13 = 286}$.

2)أ. تبيان أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

- (E) تُكافئ: $17x - 5y = 7$
- بمأنّ: 17 أولي مع 5،

فإنّه: توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تُحقق $17x - 5y = 1$،

وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$17X - 5Y = 7$ (حيث $X = 7x$ وَ $Y = 7y$)،

إذن: (E) **تقبل حلولا في** $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E):

إيجاد حل خاص لـ(E):

نلاحظ أنّ: $7 = 17\times 1 - 5\times 2$، إذن: الثنائية $(1;2)$ حل خاص لـ(E).

حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases} 17x - 5y = 7 & \dots (1) \\ 17(1) - 5(2) = 7 & \dots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x-1) - 5(y-2) = 0$

وعليه: $17(x-1) = 5(y-2)$

ومنه: 5 **يقسم** $17(x-1)$ وَ 5 **أولي مع** 17

إذن: حسب مبرهنة **غوص**؛ 5 **يقسم** $(x-1)$

أي: يوجد عدد صحيح k، حيث $x-1=5k$

وبالتالي: $\boxed{x=5k+1}$.

بالتعويض نجد: $\boxed{y=17k+2}$.

إذن: $\boxed{(x;y)=(5k+1;17k+2)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)،

نضع: $d=PGCD(a;b)$.

أ. تعيين القيم الممكنة لـd:

لدينا: $d=PGCD(a;b)$، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a-5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أنّ: $d\in D_7$

إذن: $\boxed{d\in\{1;7\}}$

ب. تعيين الثنائيات $(a;b)$ عندما $d=7$:

$\boxed{(a;b)=(35k+7;119k+14)}$ (حيث $k\in\mathbb{N}$).

حل التمرين الرابع: (07 **نقاط**)

الجزء الأوّل:

لدينا: g دّالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) دراسة تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$:

النهايات:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-x^2)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$.

اتجاه التغيّر:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=-2x-\frac{1}{x}=-\frac{2x^2+1}{x}<0}$.

ومنه: الدّالة g **متناقصة تماما** على $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$+\infty$ + +	0	- - $-\infty$

2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(1)=1-(1)^2-\ln 1=0$،

وبما أنّ: g **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$، فإنّ:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

الجزء الثاني:

لدينا: f دّالة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$$

(C) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$).

1)أ- حساب نهاية الدّالة f عند 0، وتفسير هندسيا النتيجة:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x=0^+\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty}$.

وتفسيرها الهندسي هو: المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمُقارب له.

ب- حساب نهاية الدّالة f عند $+\infty$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

جـ- تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$.

لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$ من إشارة $\ln x$ على $]0;+\infty[$،

وعليه:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
$f(x)-(-x+2)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

2)أ- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}}$

ب- استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

على المجال $]0;+\infty[$، $x^2>0$ إذن: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: f **متزايدة تماما** على المجال $]0;1]$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3)أ- تعيين إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D):

نضع: $f'(x)=-1$، نجد: $\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=-1$

ومنه: $1-\ln x-x^2=-x^2$

وعليه: $1-\ln x=0$

ومنه: $\ln x=1$

وبالتالي: $x=e$

وبما أنّ: $f(e)=\frac{\ln e}{e}-e+2=\frac{1}{e}+2-e$

فإنّ: $\boxed{A\left(e;\frac{1}{e}+2-e\right)}$

ب- كتابة معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه: $y=-(x-e)+\frac{1}{e}+2-e$،

نجد: $\boxed{(T): y=-x+\frac{1}{e}+2}$.

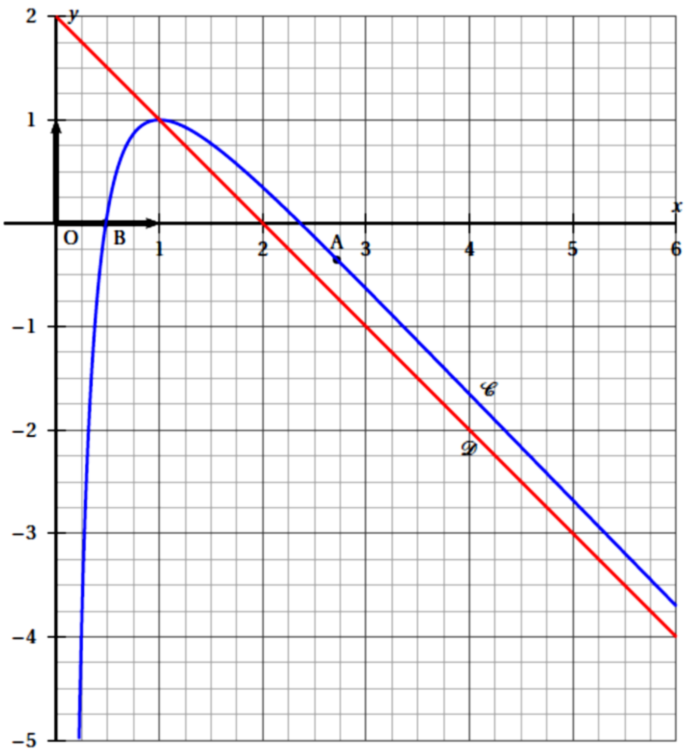
4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$:

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty\\ f(1)=1\end{cases}$، أي: $0\in]-\infty;1[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) رسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C):



انتهى ـــــــ مُحبكم في الله أستاذ المادة ـــــــ بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

تمرين محلول 12 : (Bac Métropole juin 2007)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;+\infty[$.

2) من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، نضع : $g(x)=(x+1)^2-1+\ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.
- احسب $g(0)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

4) ارسم المستقيم (D) والمنحنى (c) .

الحل :

1) حساب $f'(x)$: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=(x)'-\frac{[\ln(x+1)]'\times(x+1)-(x+1)'\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

2) التحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ و $(x+1)^2>0$

وبالتالي: $\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$ أي : $g'(x)>0$

إذن : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- حساب $g(0)$: $g(0)=(0+1)^2-1+\ln(0+1)=0$
- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $g(0)=0$

نستنتج أن : $[g(x)=0]$ يكافئ $[x=0]$

$[g(x)>0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[]$

$[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in]-1;0[]$

لكن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية :

الدالة f متناقصة على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$

3) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (c) بالنسبة للمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $-\ln(x+1)$.

• $[-\ln(x+1)=0]$ يكافئ $[\ln(x+1)=0]$ ومنه : $\ln(x+1)=\ln 1$

وبالتالي : $(x+1)=1$ إذن : $x=0$

في هذه الحالة : المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في النقطة $O(0\,;0)$.

• $[-\ln(x+1)>0]$ يكافئ $[\ln(x+1)<0]$ ومنه : $\ln(x+1)<\ln 1$

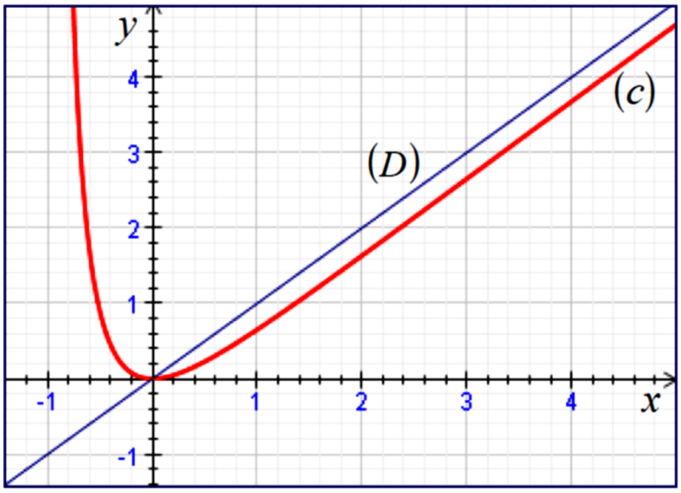
وبالتالي : $(x+1)<1$ إذن : $x<0$ أي : $x\in\,]-1;0[$

في هذه الحالة : المنحني (c) يقع فوق المستقيم (D) .

• $[-\ln(x+1)<0]$ يكافئ $[\,x\in\,]0;+\infty[\,]$

في هذه الحالة : المنحني (c) يقع تحت المستقيم (D) .

4) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



تمرين محلول 13 : (بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=2x-e^{-x^2}$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$.

د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$.

2) أنشئ المنحني (c) . (نأخذ : $\alpha\approx 0.4$)

الحل :

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\right)=0$

• التفسير الهندسي :

تذكير : إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$.

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2+2xe^{-x^2}$

ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$

• جدول تغيرات الدالة f :

$f(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$:

تذكير : إذا كان : • f مستمرة على المجال $[a\,;b]$ ؛

• f رتيبة تماما على المجال $[a\,;b]$ ؛

• $f(a)\cdot f(b)<0$.

فإنه ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

- من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

- زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0)\times f(1)<0$.

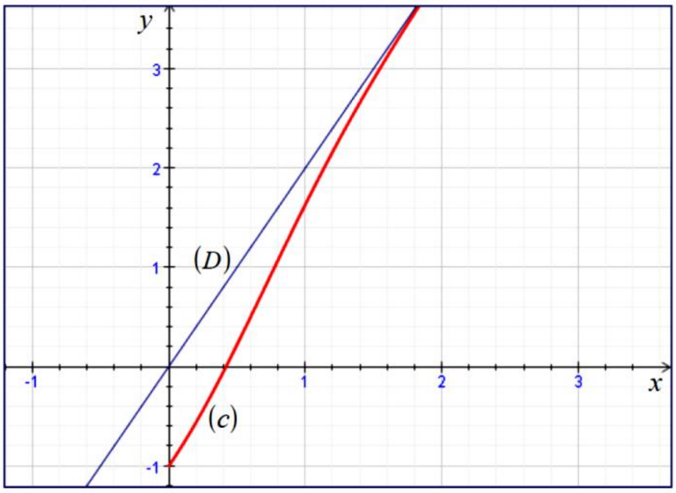
من هذه الحالات الثلاثة (الاستمرارية ، الرتابة والجداء سالب) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α مع $0<\alpha<1$.

د- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$: $[f(x)=0]$ يكافئ $[x=\alpha]$

$[f(x)>0]$ يكافئ $[\,x\in\,]\alpha;1]\,]$ و $[f(x)<0]$ يكافئ $[\,x\in[0;\alpha[\,]$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	-	0	+	
$f(x)-(-x+2)$	||	-	0	+	
الوضع النسبي	||	(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	+	0	-	

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||		+		
$g(x)$	|| $+\infty$	+ + $\searrow$	0	- - $\searrow$	$-\infty$