ثانوية: محمد العربي بعرير طولقة **السنة الدراسية: 2019/2018**

المستوى : ثالثة رياضي **الوقت : 4 سا**

اختبار الثلاثي الثالث في مادة الرياضيات

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : 4 نقط

(u_n) متتالية حسابية حدودها أعداد طبيعية تحقق

$$\begin{cases} u_{12} - u_4 = 40 \\ ppcm(u_4 \ ; \ u_{12}) = 192 \end{cases}$$

1°) أحسب u_4 ، u_{12} ثم u_0

2°) أكتب u_n بدلالة n ثم بين أن العدد 2019 حدا من حدود المتتالية (u_n) يطلب تعيين رتبته

3°) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + + ... + u_n$

4°) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث S_n مضاعف لـــ 7

5°) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = 13n + 4$

عين الحدود المشتركة بين المتتاليتين (u_n) و (v_n)

التمرين الثاني : 4 نقط

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1°) أكتب معادلة للمستوي (P) المعرف بتمثيله الوسيطي كمايلي $\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta + 1 \\ y = -\alpha - 2\beta + 3 \\ z = 2\alpha + 2\beta - 4 \end{cases}$

2°) لتكن النقطتان $A(0;1;0)$ $B(\frac{2}{3};1;\frac{2}{3})$

(S) مجموعة النقط M بحيث $\left\| \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \right\| = 6$

أ°/ بين أن (S) هي سطح الكرة يطلب تعيين احداثيات مركزها Ω و نصف قطرها R

ب°/ بين أن المستوي (P) يمس سطح الكرة (S) ثم عين احداثيات C نقطة التماس

3°) أكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة $D(-1;2;-1)$

4°) بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان ثم أكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (Δ)

5°) أحسب المسافة بين النقطة Ω والمستقيم (Δ)

التمرين الثالث : 4.5 نقط

أ°/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$

ب°/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=2+2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) عين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالتشابه S

3) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{AE}$

4) أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_D}{z_B-z_E}$ على الشكل الجبري ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDE$

5) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z علما أن $\left|\overline{z_C}\times z-8\right|=16$

أ°/ تحقق من أن A تنتمي الى (Γ)

ب°/ حدد ثم أنشئ المجموعة (Γ)

6) حدد ثم أنشئ المجموعة (γ) صورة المجموعة (Γ) بالتشابه S

التمرين الرابع : 7نقط

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0\,;\,e[\cup]e\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln(x))}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

°1) أ°/ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسياً

ب°/ أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

°2) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

أ°/ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب°/ أحسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

جـ°/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2\,;\,e]$

د°/ أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

°3) أ°/ بين أنه من أجل كل x من $]0\,;\,e[\cup]e\,;\,+\infty[$: $f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$

ب°/ أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$

°4) أرسم (Δ) و (C_f)

°5) λ عدد حقيقي من المجال $]0\,;\,1[$

أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحني (C_f)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x$ ، $x=\sqrt{e}$ ، $x=\lambda$

°6) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4نقط

1°) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $11x-7y=5 \ ....(1)$

عين الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ من المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلا للمعادلة (1) والتي تحقق :

$3\alpha-2\beta=1$ ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)

2°) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة $\begin{cases} 11x-7y=5 \\ y^2+x\equiv 0[7] \end{cases}............(S)$

3°) من أجل كل عدد صحيح k نضع : $a=3+7k$ ، $b=4+11k$ و $d=PGCD(a;b)$

أ°/ عين القيم الممكنة لـ d

ب°/ بين أنه اذا كان $k\equiv 1[5]$ فإن $d=5$

جـ°/ استنتج حسب قيم k قيمة d

د°/ عين قيمة d من أجل $k=2019^{2018}$

التمرين الثاني : 4نقط

ليكن d_1 ، d_2 ، d_3 ثلاث مكعبات متماثلة d_1 يحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 1

d_2 يحمل الأرقام 0 ، 0 ، 2 ، 2 ، 2 ، 2 و d_3 يحمل الأرقام 0 ، 0 ، 0 ، 3 ، 3 ، 3

وصندوق يحوي 4 كرات حمراء 6 سوداء لا نميز بينها عند اللمس

1°) نأخذ مكعبا عشوائيا من بين المكعبات الثلاث ونرميه

نسمي n الرقم الظاهر على الوجه العلوي للمكعب

نعتبر الحوادث A" n زوجي " و d_i " نرمي المكعب d_i" من أجل i من المجموعة $\{1;2;3\}$

نفرض أن $p(d_1)=p(d_2)=p(d_3)=\dfrac{1}{3}$

أ°/ أحسب $p(A/d_i)$ من أجل i من المجموعة $\{1;2;3\}$ ثم استنتج $p(A)$

ب°/ أحسب $p(d_1/A)$ ، $p(d_1\cap\overline{A})$

2°) اذا كانت الحادثة A محققة نسحب كرتين على التوالي بالإرجاع من الصندوق

واذا كانت غير محققة نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق

نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ°/ أحسب $p((X=0)/A)$ ، $p((X=0)/\overline{A})$ ، $p((X=2)/A)$ ، $p((X=2)/\overline{A})$

ب°/ عين قانون الاحتمال

التمرين الثالث:5نقط

أ°/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

ب°/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقطتين A ، B اللتين لاحقتيهما على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ $z_B=\overline{z_A}$

1°) احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه النقطة B و زاويته $\dfrac{-\pi}{6}$

2°) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة O بالتحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته $-\sqrt{3}$

3°) أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_D}$ على الشكل الجبري ثم حدد طبيعة الرباعي $ABCD$

4°) حدد زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه النقطة B ويحول النقطة C الى النقطة D

5°) أحسب القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$

التمرين الرابع :_7.5نقط

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^{x}}$

أ°/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب°/ أحسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

جـ°/ استنتج اشارة $g(x)$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1°) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2°) أ°/ بين أنه من اجل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln(e^{x}+1)$

ب°/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3°) أ°/ أحسب $f'(x)$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب°/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}g(x)$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f

4°) أرسم (C_f)

III) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n=\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{x}{n}}\ln(1+e^{-x})dx$

1°) أحسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ ثم استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

2°) فسر u_1 هندسيا ثم أحسبه

3°) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $n(e^{\frac{1}{n}}-1)\ln(1+e^{-1})\le u_n\le n(e^{\frac{1}{n}}-1)\ln 2$

4°) استنتج حصرا لـــ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

انتهى بالتوفيق

ثانوية محمد العربي بن عزيز طولقة — تصحيح الاختبار الثالث لسنة 2018 / 2019

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

$$\begin{cases} U_{12} - U_4 = 40 \\ PPCM(U_{12}, U_4) = 192 \end{cases}$$

$m = PPCM(U_{12}, U_4)$

$PGCD(U_{12}, U_4) = d$

1° $PGCD(m, U_{12} - U_4) = PGCD(40, 192) = 8$

ومنه $d \times PGCD(U'_{12} \times U'_4, U'_{12} - U'_4) = 8$

ومنه $d = 8$ لأن $U'_{12} \times U'_4$ أولي مع $U'_{12} - U'_4$

$$\begin{cases} U'_{12} = U'_4 + 5 \\ U'_4 \times (U'_4 + 5) = 24 \end{cases}$$

$U'^2_4 + 5U'_4 - 24 = 0$

$\Delta = 121$ ، $U'_4 = 3$ ، $U'_4 = -8$ مرفوض

$U'_{12} = 8$ ، $U'_4 = 3$

$U_{12} = 64$ ، $U_4 = 24$

2° حساب الأساس r: $8r = U_{12} - U_4 = 40$

$r = 5$

$U_0 + 4r = U_4$ ومنه $U_0 = U_4 - 4r = 4$

من أجل كل n من IN: $U_n = 5n + 4$

$U_p = 2019$ معناه $5p + 4 = 2019$

معناه $p = 403$

$U_{403} = 2019$ هو حد من حدود (U_n) ورتبته 404

3° $S_n = \frac{n+1}{2}(5n+8)$

4° $S_n \equiv 0[7]$ معناه $2S_n \equiv 0[7]$

معناه $(n+1)(5n+8) \equiv 0[7]$

معناه
$$\begin{cases} n+1 \equiv 0[7] \\ 5n+8 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 4[7] \end{cases}$$

$n = 7k + 6$ أو $n = 7k + 4$ / $k \in IN$

5° من أجل كل n من IN: $v_n = 13n + 4$

$v_p = U_q$ معناه $13p = 5q$

لدينا $5 / 13p$ و 5 أولي مع 13

إذن $5 / p$ ومنه $\boxed{p = 5k}$

$q = 13k$

الحدود المشتركة هي $U_k = 65k + 4$ مع $k \in IN$

التمرين الثاني:

1°
$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta + 1 \\ y = -\alpha - 2\beta + 3 \\ z = 2\alpha + 2\beta - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = \beta + 5 \\ x + 2y = -\beta + 7 \end{cases}$$

$(P): 2x + 2y - z - 12 = 0$

2° $\|\vec{MA} - 3\vec{MB}\| = 6$ معناه $M \in (S)$

معناه $\Omega M = 3$

ومنه (S) هي سطح الكرة التي مركزها Ω و $R = 3$

حيث Ω هو مرجح الجملة $\{(A,1), (B,-3)\}$

احداثيات Ω: $\Omega(1, 1, 1)$

$d((P), \Omega) = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 = R$

ومنه (P) يمس (S) في نقطة C

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) الذي يشمل Ω و العمودي على (P):

$$(d): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} / t \in IR$$

تعيين احداثيات C:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \\ 2x + 2y - z - 12 = 0 \end{cases} / t \in IR$$

بالتعويض نجد $t = 1$

$C(3, 3, 0)$

3° معادلة المستوي (Q) الذي يمس (S) في النقطة D شعاع ناظمه $\vec{\Omega D}(-2, 1, -2)$

$(Q): -2(x+1) + (y-2) - 2(z+1) = 0$

$(Q): 2x - y + 2z + 6 = 0$

4° لدينا $\vec{n}(-2, 1, -2)$ ناظمي (Q) و $\vec{n'}(2, 2, -1)$ ناظمي (P): $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

ومنه (P) عمودي على (Q)

$$(\Delta): \begin{cases} 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ 2x + 2y - z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 3z - 18 = 0 \\ 2x = y - 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z + 6 \\ 2x = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = z + 6 \end{cases}$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -t \\ y = 2t + 6 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in IR$$

5° $d((\Delta), \Omega) = 3\sqrt{2}$

التمرين الثالث :

أ)

$$z^2-4z+8=0$$
$$(z-2)^2+4=0$$
$$(z-2)^2-(2i)^2=0$$
$$(z-2+2i)(z-2-2i)=0$$
$z=2-2i$ أو $z=2+2i$

1°) ب) التشابه المباشر الذي مركزه A و زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt2}{2}$

$$z'-z_A=\frac{\sqrt2}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-z_A)$$
$$z'=\frac{\sqrt2}{2}\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)z+\left(1+\frac12-\frac12 i\right)z_A$$
$$=\left(-\frac12+\frac12 i\right)z+(3-i)(1+i)$$
$$=\left(-\frac12+\frac12 i\right)z+4+2i$$

2°)

$$z_E=\left(-\frac12+\frac12 i\right)(z_C)+4+2i$$
$$=(1-i)(1+i)+4+2i=6+2i$$
$$\boxed{z_E=6+2i}$$

3°)

$$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AE}$$
$$z_D=z_C+2(z_E-z_A)$$
$$=-z_A+2z_E-2z_A=-3z_A+2z_E$$
$$z_D=-6-2i+12+4i=6-2i$$
$$\boxed{z_D=6-2i}$$

4°)

$$\frac{z_A-z_D}{z_B-z_E}=\frac{2+2i-6+2i}{2-2i-6-2i}=\frac{-4+4i}{-4-4i}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

ومنه $BE=AD$ و $(BE)\perp(AD)$

$$z_A+z_D=8=z_B+z_E$$
ومنه $[AD]$ و $[BE]$ متناصفان

إذن الرباعي $ABDE$ مربع

5°) أ)

$M(z)\in(\Gamma)$ معناه $|\bar z_C\cdot z-8|=16$

$$|\bar z_C\cdot z_A-8|=|-\bar z_A\cdot z_A-8|$$
$$=|-8-8|=16$$

ومنه A تنتمي إلى (Γ)

ب) $|\bar z_C z-8|=16$ تعني $|8z-8z_C|=16|z_C|$

تعني $|z-z_C|=2|z_C|$

$$|z-z_C|=4\sqrt2$$

ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $AC=4\sqrt2$

I

ب)

$$A\xrightarrow{S}A$$
$$C\xrightarrow{S}E$$

(Γ') هي الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها $EA=4$

التمرين الرابع :

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$
$$D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$$

1°) أ)

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac1x\times\frac{1}{1-\ln x}$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}e}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}e}\frac1x\cdot\frac{1}{1-\ln x}=+\infty$$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}e}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac1x\cdot\frac{1}{1-\ln x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-\ln x)}=0^-$$

$x=0$ ، $x=e$ ، $y=0$ مستقيمات مقاربة لـ (C_f)

ب)

$$f'(x)=-\frac{1-\ln x-1}{x^2(1-\ln x)^2}$$
$$=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0^-

2°)

$$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$$
$$D_g=]0,+\infty[$$

أ)

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(1-x^2+x^2\ln x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

$\boxed{2\text{ ص }1\text{ م}}$

ب) $g'(x) = -(2x(1-\ln x) + x)$
$= -(x - 2x\ln x)$
$= -x(1 - 2\ln x)$

x	0		1		$\sqrt{e}$		2	e	$+\infty$
$-x$	‖	$-$				$-$			
$1-2\ln x$	‖	$+$		0		$-$			
$g'(x)$	‖	$-$		0		$+$			
$g(x)$	‖	1 ↘	0	$\frac{2-e}{e} \simeq -0{,}36$		↗	0		$+\infty$

ج) الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2, e]$

$g(2) \simeq -0{,}23$
$g(e) = 1$

ومنه حسب ق م م يوجد α وحيد من المجال $]2, e[$: $g(\alpha) = 0$

$g(1) = 0$

د)

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3°) أ) تبيان أن لكل x من D_f

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1-\ln x)} - x$$

$$= \frac{1 - x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$$

ب)

x	0		1		α		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

إذا كان $x \in]0, 1[\cup]\alpha, e[$ فإن
(C_f) فوق (Δ)

إذا كان $]1, \alpha[\cup]e, +\infty[$ فإن
(C_f) أسفل (Δ)

إذا كان $x \in \{1, \alpha\}$ فإن (Δ) ينطبق على (C_f)

5°) أ) $$\frac{A(\lambda)}{4} = \int_\lambda^1 (f(x) - x)\,dx + \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x))\,dx$$

$$I = \int_\lambda^1 (f(x) - x)\,dx = \int_\lambda^1 f(x)\,dx - \int_\lambda^1 x\,dx$$

$$= \int_\lambda^1 \frac{dx}{x(1-\ln x)} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_\lambda^1$$

$$= -\int_\lambda^1 \frac{-\frac{dx}{x}}{1-\ln x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

$$= \Big[\ln|1-\ln x|\Big]_\lambda^1 - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2}$$

$$= \ln|1-\ln\lambda| + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$J = \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x))\,dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx + \int_1^{\sqrt{e}} -\frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-\frac{1}{x}\,dx}{1-\ln x}$$

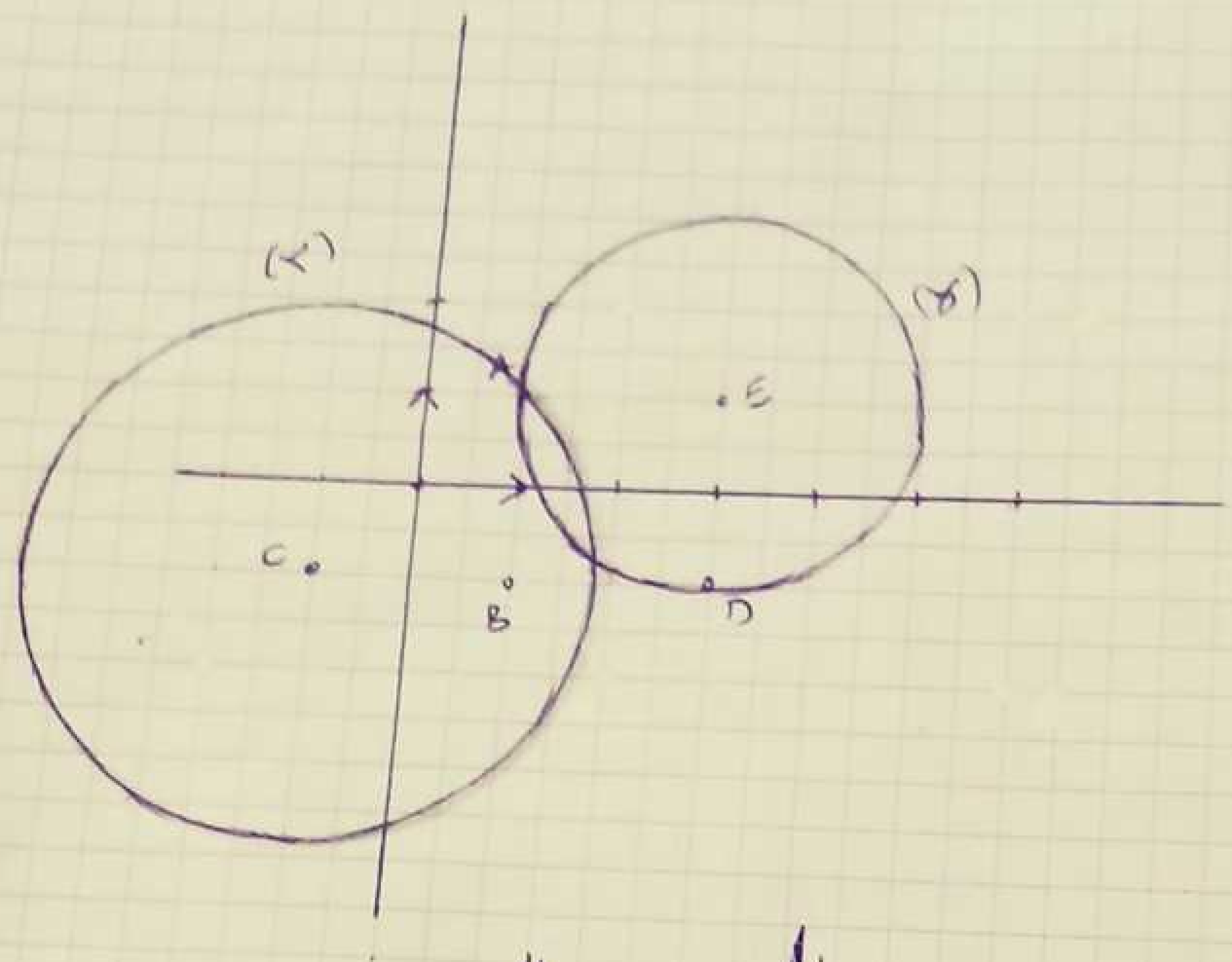
$$\frac{e}{2} - \frac{1}{2} + \Big[\ln|1-\ln x|\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2$$

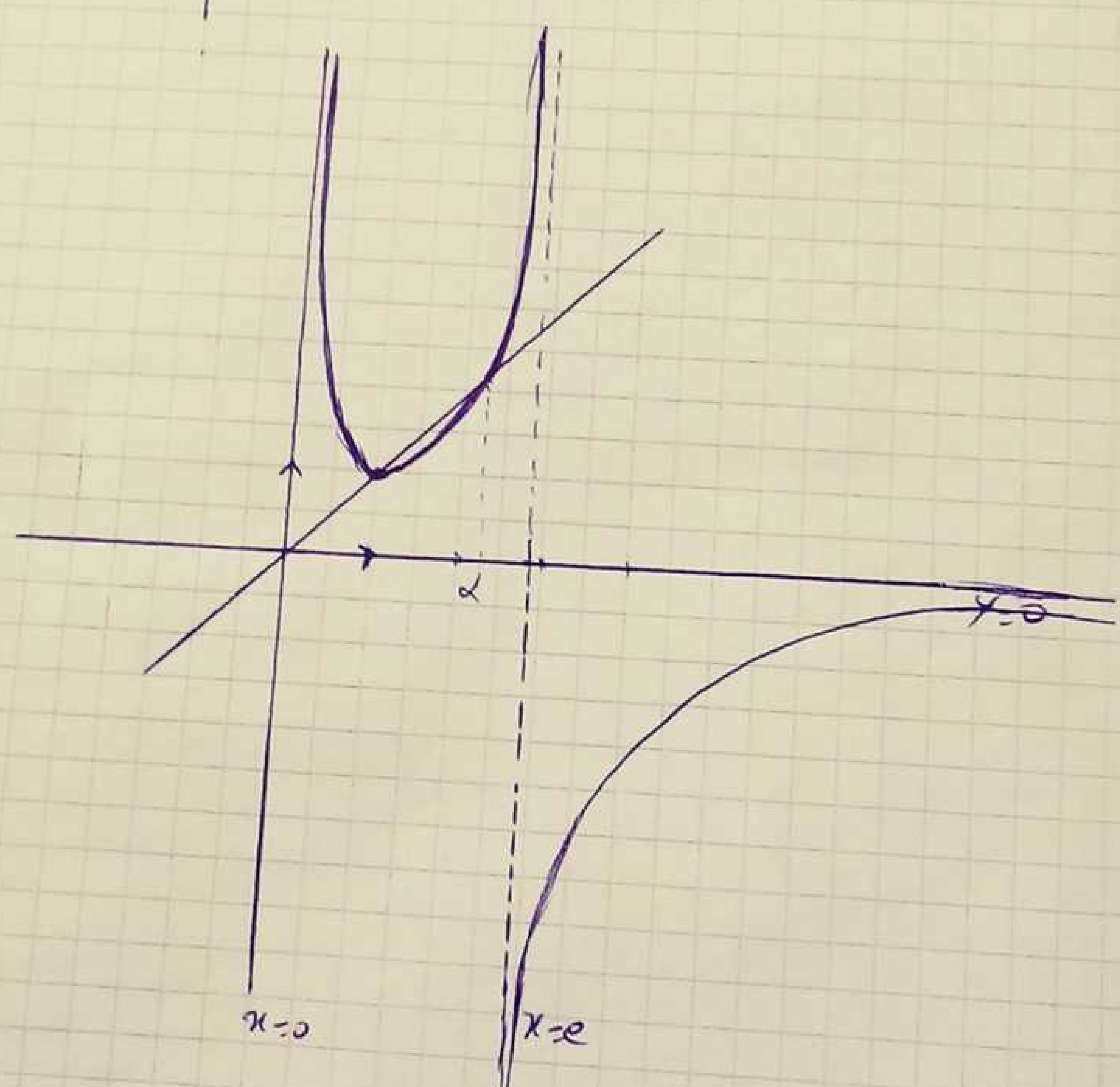
$$\frac{1}{4} \times A(\lambda) = \ln|1-\ln\lambda| + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\boxed{\frac{1}{4}A(\lambda) = \ln|1-\ln\lambda| + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{e}{2} - 1 - \ln 2}$$

ب) $$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = +\infty$$



(C)
(Γ)
E
C
B
D



α
y=0
x=0
x=e

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول : $11x-7y=5 \longrightarrow (1)$

1°) $\begin{cases} 11\alpha-7\beta=5 \longrightarrow \times(1) \\ 3\alpha-2\beta=1 \longrightarrow \times 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha-\beta=-1 \longrightarrow \text{الفرق} \\ 3\alpha-2\beta=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ \beta=4 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=4 \end{cases}$ $(\alpha,\beta)=(3,4)$

تعيين حلول المعادلة (1)

$11(x-\alpha)=7(y-\beta)$ يعني $11x-7y=11\alpha-7\beta$

$7/(x-\alpha)$ حسب غوص $7/11(x-\alpha)$ و 7 أولي مع 11

ومنه $x-\alpha=7k \;/ k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض نجد

$y-\beta=11k$

ومنه حلول المعادلة (1) هي

$(S) : \{(x,y) \,/\, x=7k+3,\ y=11k+4 \;/ k\in\mathbb{Z}\}$

2°) $(S)\begin{cases} 11x-7y=5 \\ y^2+x\equiv 0\,[7] \end{cases}$

$(S)\begin{cases} x=7k+3 \\ y=11k+4 \\ (11k+4)^2+7k+3\equiv 0\,[7] \;\text{—}\; (1) \end{cases}$

$(11k+4)^2+7k+3=121k^2+88k+19+7k$

$\equiv 2k^2+4k+5\,[7]$

$\equiv 2(k^2+2k+6)\,[7]$

$\equiv 2(k^2-5k+6)\,[7]$

$\equiv 2(k-2)(k-3)\,[7]$

(1) تعني $\begin{cases} k\equiv 2\,[7] \\ k\equiv 3\,[7] \end{cases}$

$\begin{cases} k=7\lambda+2 \\ k=7\lambda+3 \end{cases} / \lambda\in\mathbb{Z}$

إذا كان $k=7\lambda+2$ فإن

$\begin{cases} x=49\lambda+17 \\ y=77\lambda+26 \end{cases} / \lambda\in\mathbb{Z}$

إذا كان $k=7\lambda+3$ فإن

$\begin{cases} x=49\lambda+24 \\ y=77\lambda+37 \end{cases} / \lambda\in\mathbb{Z}$

3°) $\begin{cases} a=7k+3 \\ b=11k+4 \end{cases} / k\in\mathbb{Z}$

أ) $11a-7b=5$

$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$ ومنه $d/(11a-7b)$

ومنه $d/5$

ومنه $d\in\{1,5\}$

ب) $k\equiv 1[5]$ ومنه $7k+3\equiv 7+3\,[5]$

ومنه $a\equiv 0[5]$

ومنه $5/a$

*) $k\equiv 1[5]$ ومنه $11k+4\equiv 11+4\,[5]$

ومنه $b\equiv 0[5]$

ومنه $5/b$

إذا كان $k\equiv 1[5]$ فإن $5/d$

ومنه كان $d\in\{1,5\}$ فإن $\boxed{d=5}$

جـ) إذا كان $d=5$ فإن $\begin{cases} 5/a \\ 5/b \end{cases}$

فإن $\begin{cases} 5/7k+3 \\ 5/11k+4 \end{cases}$

فإن $5/2(11k+4)-3(7k+3)$

فإن $5/k-1$

فإن $k-1\equiv 0\,[5]$

$k\equiv 1\,[5]$

من ب) و جـ) نجد

$d=5$ يعني $k\equiv 1[5]$

إذا كان $k\equiv 1[5]$ فإن $d=5$

إذا كان $k\not\equiv 1[5]$ فإن $d=1$

5) $K=2019^{2018}$

$2019\equiv -1\,[5]$

$K=2019^{2018}\equiv 1\,[5]$

ومنه $d=5$

التمرين الثالث

1) $z^2-2z+4=0$ تعني $(z-1)^2+3=0$

$(z-1)^2-(i\sqrt{3})^2=0$

$(z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3})=0$

$z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1+i\sqrt{3}$

2) $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_A-z_B)$

$z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A+(1-e^{-i\frac{\pi}{3}})z_B$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+i\sqrt{3})+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1-i\sqrt{3})$

$z_C=1+\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$

3) $z_D-z_A=-\sqrt{3}(-z_A)$

$z_D=(1+\sqrt{3})z_A$

$z_D=(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})=1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}+3)i$

4) $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D}=\frac{-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)i}{-\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+3)i}$

$=\frac{\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-3)i}{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+3)i}$

$=\frac{(\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-3)i)(\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+3)i)}{3+(2\sqrt{3}+3)^2}$

$=\frac{3-(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)-i(6-3\sqrt{3}+6+3\sqrt{3})}{24+12\sqrt{3}}$

$=\frac{12-12-12i}{24+12\sqrt{3}}=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}i$

$=-(2-\sqrt{3})i=(\sqrt{3}-2)i$

إذن (BD) عمودي على (AC)

و $AC \neq BD$

$z_A+z_C=2+\sqrt{3}+3i$

$z_B+z_D=2+\sqrt{3}+3i$

لدينا $[BD]$ و $[AC]$ متناصفان

ومنه الرباعي $ABCD$ معين

م ع ص ع

التمرين الثاني

1) $P(A/d_1)=\frac{1}{6}$

$P(A/d_2)=1$

$P(A/d_3)=\frac{3}{6}$

$P(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}+\frac{6}{6}+\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{9}$

2) $P(d_1\cap A)=P(d_1)\times P(A/d_1)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

$P(d_1/A)=\frac{P(d_1\cap A)}{P(A)}=\frac{1/18}{5/9}=\frac{1}{10}$

II) 1) $P((X=0)/A)=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}$

$P((X=0)/\bar{A})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

$P((X=2)/A)=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$

$P((X=2)/\bar{A})=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

$P(X=0)=P((X=0)\cap A)+P((X=0)\cap\bar{A})$

$=P(A)P((X=0)/A)+P(\bar{A})P((X=0)/\bar{A})$

$=\frac{5}{9}\times\frac{9}{25}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{4}{27}=\frac{47}{135}$

$P(X=2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{25}+\frac{4}{9}\times\frac{2}{15}=\frac{20}{135}$

$P(X=1)=1-(P(X=0)+P(X=2))=\frac{68}{135}$

2)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{47}{135}$	$\frac{20}{135}$	$\frac{68}{135}$

4) المربع الزاوي ABCD معين

$(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ و

$A\hat{B}C$ منصف $[BD]$

ومنه $(\vec{BC}, \vec{BD}) = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$

$C \xrightarrow{S} D$

زاوية S هي $\frac{\pi}{12}$

التمرين الرابع

I) 1) $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{x}}$

$D_g =]-\infty, +\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

3) $g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$= \frac{-1}{e^{x}+1} + \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$

$= \frac{-1}{(1+e^{x})^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

4) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) > 0$

II) $f(x) = e^{x}\ln(1+e^{-x})$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} = 1$

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

2) ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f(x) = e^{x}\ln(e^{-x}\cdot e^{x} + e^{-x})$

$= e^{x}(-x + \ln(1+e^{x}))$

$= -xe^{x} + e^{x}\ln(1+e^{x})$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-xe^{x} + e^{x}\ln(e^{x}+1)) = 0$ ب)

$y=0$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

3) $f'(x) = e^{x}\ln(1+e^{-x}) + e^{x}\times\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$= e^{x}\left(\ln(1+e^{-x}) - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$

$= e^{x}\left(\ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{e^{x}+1}\right)$

$= e^{x}\times g(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{x}\times g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

III) من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^1 e^{x/n}\ln(1+e^{-x})\,dx$

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = e^{x}g(x) + \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$= e^{x}\left(g(x) + \frac{1}{1+e^{x}}\right)$

$= e^{x}\ln(1+e^{-x})$

$= f(x)$

$F(x) = f(x) + \ln(1+e^{x})$

2) $u_1 = \int_0^1 e^{x}\ln(1+e^{-x})\,dx$

u_1 هو مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $y=0$ ، $x=0$ ، $x=1$

$u_1 = [F(x)]_0^1$

$= [f(x) + \ln(1+e^{x})]_0^1$

$\boxed{u_1 = e\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e) - 2\ln 2}$

$\boxed{u_1 = (e+1)\ln(1+e) - e - 2\ln 2}$

م2 ص3

3°) $0 \le x \le 1$ ومنه $-1 \le -x \le 0$

ومنه $\frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1$

ومنه $1+\frac{1}{e} \le 1+e^{-x} \le 2$

ومنه $\ln(1+\frac{1}{e}) \le \ln(1+e^{-x}) \le \ln 2$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

$e^{x/n}\ln(1+\frac{1}{e}) \le e^{x/n}\ln(1+e^{-x}) \le \ln 2\, e^{x/n}$

ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

$\int_0^1 e^{x/n}\ln(1+\frac{1}{e})dx \le \int_0^1 e^{x/n}\ln(1+e^{-x})dx \le \int_0^1 \ln 2\, e^{x/n}dx$

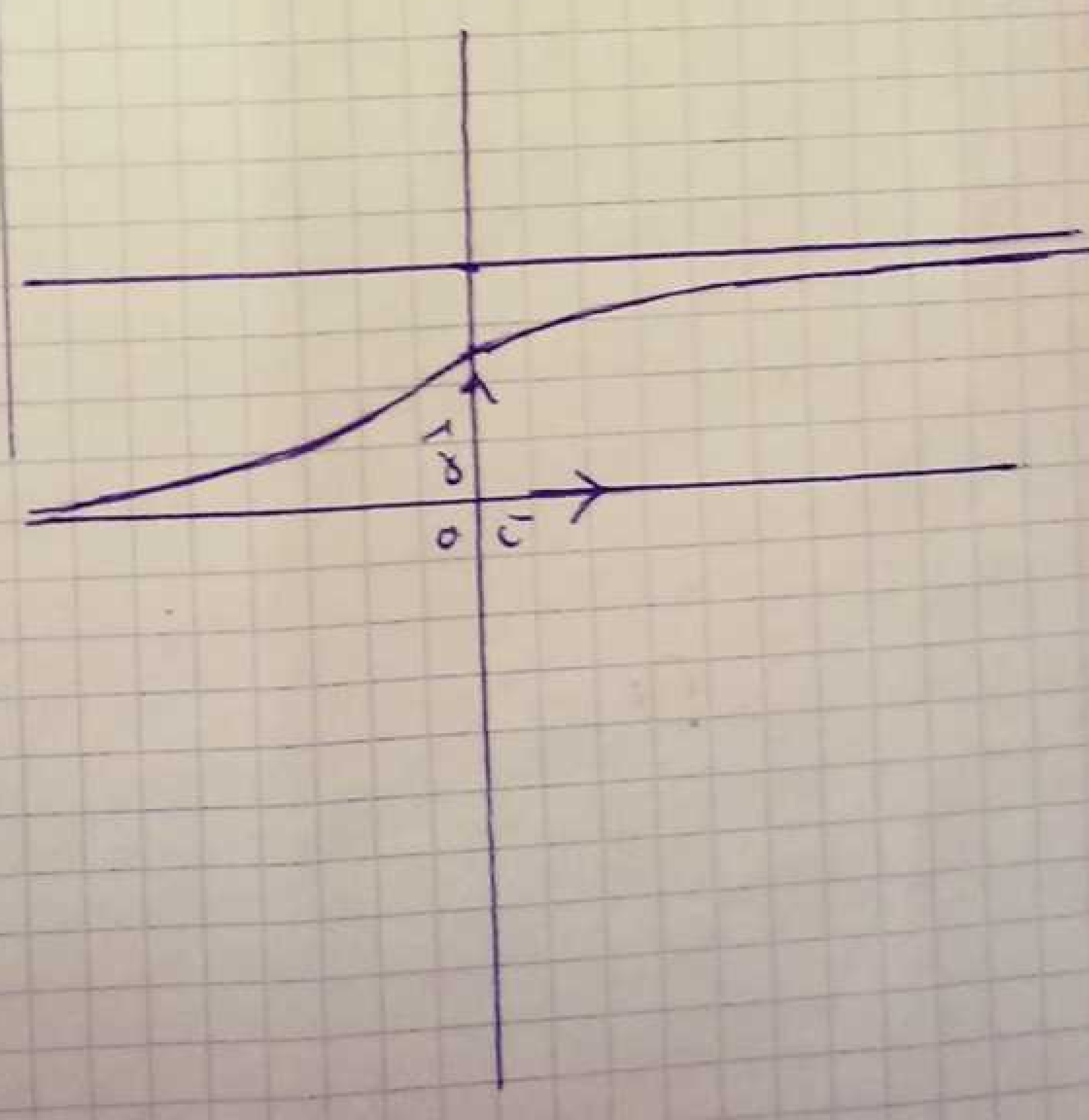
ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

$n\ln(1+\frac{1}{e})(e^{1/n}-1) \le U_n \le n\ln 2\,(e^{1/n}-1)$

$n(e^{1/n}-1)\ln(1+\frac{1}{e}) \le U_n \le n(e^{1/n}-1)\ln 2$

4°) $\lim_{n \to +\infty} n(e^{1/n}-1) = 1$

ومنه $\ln(1+\frac{1}{e}) \le \lim_{n\to+\infty} U_n \le \ln 2$



4 ص 29