تجميعية الباكالوريات التجريبية

لمختلف ثانويات الوطن

شعبة العلوم تجريبية

مرفقة بالحلول

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

لسنة 2019

الاستاذ: سراي علي

وزارة التربية الوطنية — ثانوية أحمد الغازي حي 608 مسكن

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة 2019

الشعبة : علوم تجريبية — اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2,-1,3)$ ، $B(1,3,5)$ ، $C\left(2,-\frac{1}{2},-4\right)$ و $E(1,-1,2)$

المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج قيسا بالراديان للزاوية BAC ، ثم استنتج أن النقط A , B و C تعين مستويا .

ب) أوجد العددين الحقيقين α و β بحيث يكون الشعاع $\vec{n}(\alpha,\beta,1)$ ناظميا للمستوي (ABC)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=EM$

أ) أكتب $f(t)$ بدلالة t ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f.

ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة EM أصغر ما يمكن ؟ استنتج المسافة بين E والمستقيم (Δ).

جـ) استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ).

3) أ) أكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E وتمس المستقيم (Δ).

ب) أدرس الوضع النسبي للمستوي (ABC) و سطح الكرة (S).

التمرين الثاني: (05 نقط)

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ; B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=i\,z_A$ و $z_C=\overline{z_A}$. ($\overline{z_A}$ مرافق z_A) .

1) أكتب z_A , z_B على الشكل الجبري .

2) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $\dfrac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$ ..... (E)

ب) استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة z_Ω

(حيث z_Ω هي حل المعادلة (E)) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

3) أ) أوجد مركز و نصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC.

ب) بين أن النقطة H ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة (γ') صورة الدائرة (γ) بالتحويل S ثم عيّن معادلة ديكارتية للدائرة (γ')

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

5) أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $z=z_C-k\dfrac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathbb{R}^+$

ب) عيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $\arg\left[\left(\dfrac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$.

أقلب الورقة

التمرين الثالث: (04 نقط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=-\frac{5}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(u_n+2)^2-2$

1) أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2\prec u_n\prec -1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما . جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\ln(u_n+2)$.

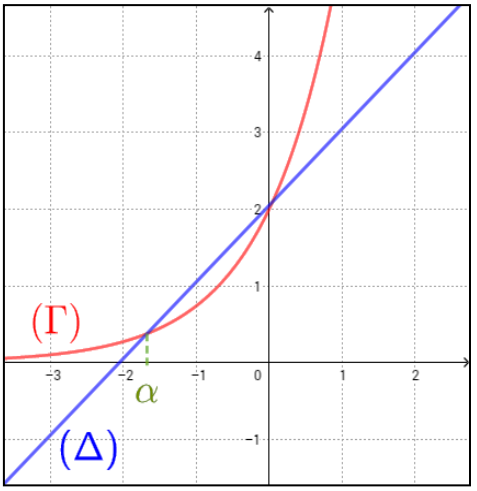
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول v_0 وأساسها q .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

ب) استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$.

التمرين الرابع: (07 نقط)



(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(Γ) التمثيل البياني للدالة: $x\to 2e^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$.

α و 0 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث $-1.6\prec\alpha\prec-1.5$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-2e^x+x+2$

حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$.

جـ) عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y=2(ex-3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ ، أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

جـ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها β حيث: $-2.4\prec\beta\prec-2.3$

3) أنشئ كل من (D) ، (C_f). نأخذ $f(-3)\approx-22.31$ ، $f(\alpha)\approx4.15$.

4) أ) أوجد العددين الحقيقيين a ; b حتى تكون الدالة $x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (D) والمستقيمين الذين معادلتيهما :

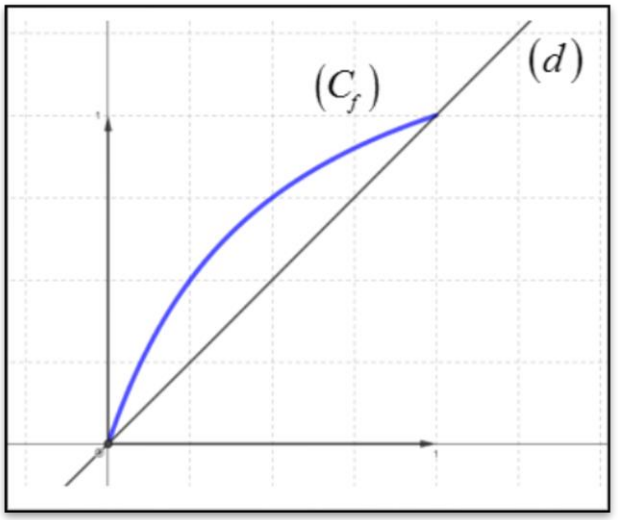
$x=1$; $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n\succ1)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقط)

الشكل في الورقة المرفقة هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\dfrac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) مثل على محور الفواصل الحدود $u_0\,;u_1\,;u_2\,;u_3$ للمتتالية (u_n) دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) اثبت من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n \prec 1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{1-u_n}{2u_n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4)احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=v_0+2\,v_1+2^2\,v_2+..+2^n\,v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times ...\times v_n$.

التمرين الثاني: (04 نقط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق (علما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس) .

1) أحسب احتمالات الأحداث الآتية : A : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء ".

B : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " . C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها .

أحسب كلا من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$.

ب) اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25\,DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها . هل اللعبة مربحة له ؟

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_2 .

أحسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون .

التمرين الثالث: (05 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : (E).... $z^2+2|z|^2-\dfrac{3}{4}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) لتكن A , B و C ثلاث نقط من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$z_A=\dfrac{-1}{2}$ ، $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$.

أ) أكتب كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي . ب) بين أن : $z_C{}^{2018}\times\left(z_A+z_B\right)^{1439}=z_A+z_B$.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$ و نسبته $k=2$.

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S.

ب) أوجد لاحقتا النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب بالتشابه المباشر S.

4) بين ان المبدأ O هو مركز ثقل المثلث ABC ثم عين مجموعة النقط Mمن المستوي التي تحقق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$

5) أنشئ النقطة H ذات اللاحقة z_H حيث: $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب .

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

أدرس اتجاه تغير الدالة h ، استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$.

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2f'(x)=-h(x)$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3;0.4[$.

جـ) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له .

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f) .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\frac{1}{2}x+m$ .....(E).

5) لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k) (الإنشاء غير مطلوب).

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) أوجد الدالة الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x=1$.

جـ) λ عدد حقيقي حيث: $\lambda\succ1$. أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=-\int_1^\lambda f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيـــق .....عن أساتذة المادة ..... رمضان مبارك للجميع ..... العاقبة للنجاح إن شاء الله

ثانوية أحمد الغازي حي 608 مسكن المسيلة	تصحيح البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات **الموضوع الأول**	2019 / 2018 الشعبة: ع.تجريبية

التمرين الأول :(04 نقاط)

1) أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3\ 4\ +4\left(\frac{1}{2}\right)+2\ -7\ =0$

استنتاج قيسا بالراديان للزاوية BAC

بمأن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان

وبالتالي: $BAC=\frac{\pi}{2}$

استنتاج أن A , B و C **تعين مستوي:** بمأن $B\hat{A}C\neq 0$ و $B\hat{A}C\neq\pi$ فإن النقط A , B و C ليست على إستقامة واحدة وبالتالي تعين مستوي .

ب) تعيين العددين الحقيقين α و β **بحيث يكون** $\vec{n}(\alpha,\beta,1)$ **ناظميا للمستوي** (ABC) **ثم استنتاج معادلة ديكارتية له**

$\vec{n}(\alpha,\beta,1)$ ناظمي للمستوي (ABC) يعني $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\text{ يكافىء }\begin{cases}3\alpha+4\beta+2=0...(1)\\ 4\alpha+\frac{1}{2}\beta-7=0...(2)\end{cases}$$

(2) يكافىء $-32\alpha-4\beta+56=0$....(3) بجمع (1) و (3)

طرفا لطرف نجد : $-29\alpha+58=0$

ومنه: $\alpha=2$ ، $\beta=-2$ اذن: $\vec{n}(2,-2,1)$

ا استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) :

$A\in(ABC)$ معناه $2(-2)-2(-1)+3+d=0$ ومنه: $d=-1$

اذن: $(ABC):2x-2y+z-1=0$

2)أ) كتابة $f(t)$ **بدلالة** t **ودراسة إتجاه تغير الدالة** f:

لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$ ، $E(1;-1;2)$

$f(t)=EM=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{3t^2-6t+5}$

$f'(t)=\frac{3t-3}{\sqrt{3t^2-6t+5}}$ ، $f'(t)=0$ يكافئ $t=1$ ، $f(1)=\sqrt{2}$

الدالة f متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

ب) استنتاج قيمة العدد الحقيقي t **التي تكون من أجلها المسافة** EM **أصغر مايمكن ؟**

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $t=1$ هي: $\sqrt{2}$

ومنه أصغر قيمة للمسافة EM هي $\sqrt{2}$

استنتاج المسافة بين E **والمستقيم** (Δ): $d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$

ج)استنتاج إحداثيات H **المسقط العمودي** E **على** (Δ): نعوض $t=1$ في عبارة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $H(0;0;2)$

3) أ) كتابة معادلة سطح الكرة (S) **التي مركزها** E **وتمس المستقيم** (Δ) لدينا $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=R^2$

ومنه: $R=d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$ $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$

ب) **دراسة الوضع النسبي للمستوي** (ABC) **و سطح الكرة** (S):

$d(E,(ABC))=\frac{|2(1)-2(-1)+2-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}\approx 1.66$ ل

بمأن $d(E,(ABC))\succ R\approx 1.41$ فإن $(S)\cap(ABC)=\phi$

التمرين الثاني :(05 نقاط)

1)كتابة z_A , z_B **على الشكل الجبري**: $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=i\,z_A$

$z_A=1+i$, $z_B=-1+i$

2)أ) نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E) **ذات المجهول** z :

(E) يكافئ $\frac{1+i-z}{-1+i-z}=2(-1)$ يكافئ $3z=-1+3i$

ومنه: $z=\frac{-1}{3}+i$ اذن: $S=\left\{\frac{-1}{3}+i\right\}$

استنتاج أن A **هي صورة** B **بواسطة تشابه مباشر** S **مركزه النقطة** Ω **لاحقتها** $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$: من (E) نستنتج $\frac{z_A-z_\Omega}{z_B-z_\Omega}=2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A=2e^{i\pi}z_B+\left(1-2e^{i\pi}\right)z_\Omega$ العبارة من الشكل

$z'=ke^{i\theta}z+\left(1-ke^{i\theta}\right)z_\Omega$ معناه $S(B)=A$ حيث S تشابه مباشر نسبته $k=2$ وزاويته $\theta=\pi$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$. عبارته المركبة : $z'=-2z-1+3i$

حالة خاصة: S هو تحاك مركزه النقطة Ω ونسبته $K=-2$

3) أ) إيجاد مركز و نصف قطر الدائرة (γ) **المحيطة بالمثلث** ABC: بما أن $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$

فإن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ و $AB=AC=2$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الضلعين.مركز الدائرة (γ) هو منتصف الوتر $[BC]$

هو المبدأ O لأن $\frac{z_B+z_C}{2}=0$ و نصف قطرها $r=\frac{BC}{2}=\sqrt{2}$

بمأن: $-1\prec u_n\prec -2$ فإن $u_n+2\succ 0$; $u_n+1\prec 0$

ب) نبين أن النقطة H ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة (γ') صورة الدائرة (γ) بالتحويل S ثم تعيّين معادلة ديكارتية للدائرة (γ')

لدينا: (γ') نصف قطرها $r'=2\sqrt{2}$

ومركزها H حيث $S(O)=H$ أي: $z_H=-2z_O-1+3i$

ومنه: $z_H=-1+3i$ ، $(\gamma'):(x+1)^2+(y-3)^2=8$

4)تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا:

$$\frac{z_A}{z_C}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{in\frac{\pi}{2}}$ عدد حقيقي موجب يكافئ $\frac{n\pi}{2}=2k\pi$

ومنه: $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

5)أ) تعيّين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathbb{R}^+$:

$$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}=1-i-k\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=1-i+k\left(-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=1-i+ke^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=1-i+ke^{i\frac{3\pi}{2}}$$

ومنه: (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة C موازي لحامل محور التراتيب شعاع توجيهه لاحقته $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$.

ب) تعيّين (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$\arg\left[\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ ،(1)....(1) يكافئ $k\in\mathbb{Z}$

$2\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\pi+2k\pi$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه: (Γ') هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين $A;B$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)أ) نبين بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $-2\prec U_n\prec -1$

لتكن الخاصية $P(n)$: $n\in\mathbb{N}$: $-2\prec U_n\prec -1$

① من أجل $n=0$: $-2\prec U_0\prec -1$ محققة لأن $U_0=\frac{-5}{4}$

ومنه : $P(0)$ صحيحة .

② نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-2\prec U_{n+1}\prec -1$ أي نبين : $-2\prec (U_n+2)^2-2\prec -1$

$-2\prec U_n\prec -1$ يكافئ $0\prec U_n+2\prec 1$ يكافئ

ومنه: $-2\prec U_{n+1}\prec -1$ $-2\prec (U_n+2)^2-2\prec -1$

اذن $P(n+1)$ صحيحة .من ① و ② حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) نبين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما: ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n=U_n^2+3U_n+2=(U_n+1)(U_n+2)$

ومنه: $U_{n+1}-U_n\prec 0$ نستنتج ان (U_n) متناقصة تماما

جـ) استنتاج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم حساب نهايتها:

بما أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l .

نجد: $l=(l+2)^2-2$ يكافئ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(U_n+2)^2-2\right]$

$l^2+3l+2=0$ ، $\Delta=1$ ، $l=-2$ مقبول أو $l=-1$ مرفوض لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بـ-2 اذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-2$

2)أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حدها الاول v_0 وأساسها q: (v_n) م.هـ تكافئ من اجل كل عدد طبيعي n يوجد $q\in\mathbb{R}$ حيث $v_{n+1}=q.v_n$ ، لدينا:

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+2)=\ln(u_n+2)^2=2\ln(u_n+2)$$

ومنه: $v_{n+1}=2v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=\ln(u_0+2)=\ln\frac{3}{4}$

أ)كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$v_n=v_0q^n=\left(\ln\frac{3}{4}\right)\times 2^n$ و . $v_n=\ln(u_n+2)$ يكافئ $e^{v_n}=u_n+2$

ومنه: $u_n=e^{v_n}-2=e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)2^n}-2$

3)أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

$$S_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})=-\infty$

ب)استنتاج بدلالة n الجداء P_n: لدينا $u_n=e^{u_n}-2$

ومنه: $u_n+2=e^{v_n}$ ، $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$

$$P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times.....\times e^{v_n}$$
$$=e^{v_0+v_1+...+v_n}=e^{S_n}=e^{\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$g(x)=-2e^x+x+2$ ، $(\Delta):y=x+2$ ، $(\Gamma):y=2e^x$ $(I$

1) بقراءة بيانية تحدد وضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
الوضعية	فوق	$(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E'(\alpha;2e^\alpha)\}$	تحت	$(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E(0;2)\}$	فوق

2) تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم x :لدينا

$g(x)=-2e^x+x+2=-\left(2e^x-(x+2)\right)$

إشارة $g(x)$ تتعلق بوضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

بما أن f معرفة ومستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما)على

(II) $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$

1) أ)حساب:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{-\infty}\right]=-\infty$

ب)نبين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة f':

$f'(x)=2e+(-x-2)e^{-x+1}=-(2e^{x}+x+2)e^{-x+1}$

$=-g(x)e^{-x+1}$

ج) تعيين دون حساب: لدينا $f'(\alpha)=-g(\alpha)e^{-\alpha+1}=0$

ومنه: $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$

تفسير النتيجة هندسيا: المنحنى (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة α مماسا أفقيا معادلته: $y=f(\alpha)$

د) استنتاج اتجاه تغير الدالة f **ثم تشكيل جدول تغيراتها:**

لدينا $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$ ومنه شارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ لأن: $e^{-x+1}\succ0$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

الدالة f متناقصة تماما على $[\alpha;0]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	B	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$f(\alpha)$ ↘		2.15 ↗ $+\infty$

2)أ) نبين أن $(D):y=2(ex-3)$ **مستقيم مقارب لـ** (C_f) **عند** $+\infty$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=0$

ومنه: $(D):y=2(ex-3)$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

****دراسة وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة للمستقيم** (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=(x+3)e^{-x+1}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	تحت	$(C_f)\cap(D)=\{F(-3;-22.31)\}$	فوق

ب) نبين أن المنحنى (C_f) **يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها**

f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$: $f''(x)=(x+1)e^{-x+1}$

$f''(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها عند -1 ومنه: $\omega(-1;3.34)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ج) نبين أن المنحنى (C_f) **يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها** β **حيث:** $-2.4\prec\beta\prec-2.3$،

لدينا: $f(-2.3)\approx0.47$ ، $f(-2.4)\approx-1.07$

$]-2.4;-2.3[$ و $f(-2.3).f(-2.4)\prec0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها β حيث $f(\beta)=0$

3) إنشاء كل من (D)، (C_f):

$f(-3)\approx-22.31$ ، $f(\alpha)\approx4.15$

4) أ) إيجاد $a;b$ **حتى تكون الدالة** $x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة:

$x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$ ، لتكن

$F(x)=(ax+b)e^{-x+1}$ ، $k(x)=(x+3)e^{-x+1}$

F دالة اصلية للدالة k على $\mathbb{R}$ معناه

F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $F'(x)=g(x)$

لدينا : F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$F'(x)=(-ax+a-b)e^{-x+1}$

بالمطابقة نجد:

$-a=1;a-b=3$

ومنه: $a=-1;b=4$

$F(x)=(-x+4)e^{-x+1}$

ب)حساب I_n **مساحة الحيز المستوي المحدد بـ** (C_f) **و** (D) **والمستقيمين الذين معادلتيهما:** $x=1\,(n\succ1)$; $x=n$

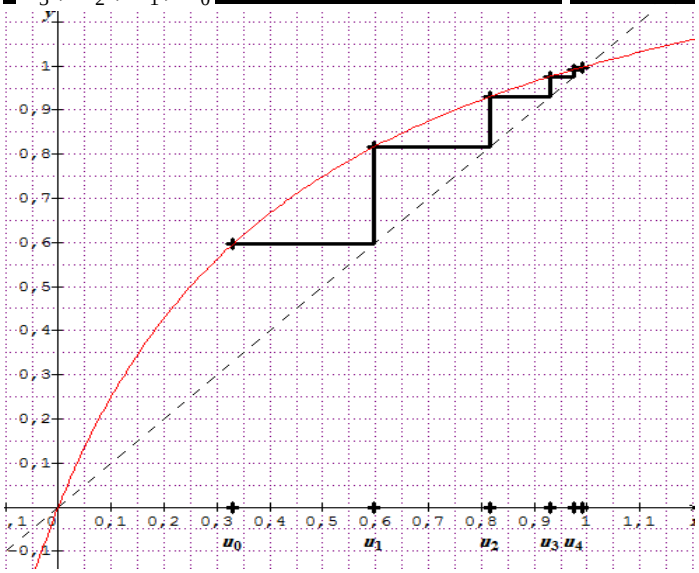
$I_n=\int_1^n\left[f(x)-y\right]dx=\int_1^n(x+3)e^{-x+1}dx$

$=\left[(-x-4)e^{-x+1}\right]_1^n=-(n+4)e^{-n+1}+5\,(u.a)$

حساب: $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-(n+4)e^{-n+1}+5\right]=5$

التمرين الأول: (04 نقاط)

1)أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$:



ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2)أ) اثبات من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec u_n \prec 1$

نبرهن بالبرهان بالتراجع

① من أجل $n=0$: $0 \prec u_0 \prec 1$ محققة لان: $u_0 = \frac{1}{3}$

② نفرض أن من أجل عدد طبيعي n: $0 \prec u_n \prec 1$ صحيحة

ونبرهن ان : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$

لدينا: $0 \prec u_n \prec 1$ و $f(1)=1$; $f(0)=0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

بما أن f متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0) \prec f(u_n) \prec f(1)$

ومنه : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

من ① و ② نستنتج حسب البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec u_n \prec 1$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 2u_n}{2u_n + 1} = \frac{-2u_n(u_n - 1)}{2u_n + 1}$

بما أن: $0 \prec u_n \prec 1$ فإن $u_n - 1 \prec 0$ ، ومنه: $u_{n+1} - u_n \succ 0$

نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

لأنها: محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

****حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:**

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3u_n}{2u_n + 1}$ يكافئ $\ell = \frac{3\ell}{2\ell + 1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell - 1)}{2\ell + 1} = 0$

ومنه $\ell = 0$ (مرفوض) أو $\ell = 1$ (مقبول محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما) ،ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

3) أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{3u_n}{2u_n + 1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n + 1}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right) = \frac{1}{3}v_n$$ ومنه

(v_n) م.هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1-u_0}{2u_0} = 1$

ب)كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n: $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $u_n = \frac{1}{2v_n + 1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$ ، $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n :

$$S_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \ldots + 2^n v_n$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $n+1$ هو مجموع

وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه: $S_n = 1\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right] = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$$
$$= v_0 \times (v_0 q) \times (v_0 q^2) \times \ldots \times (v_0 q^n)$$
$$= (v_0)^{n+1} \times q^{0+1+2+\ldots+n} = (1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة : $C_9^3 = 84$

1) حساب احتمال الأحداث:

$$p(B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84} \approx 0.06 \text{ ، } p(A) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{C_9^3} = \frac{6}{84} \approx 0.07$$

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل

الحدث $\overline{C}$: عدم سحب كرة بيضاء

ط1: $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88$

ط2: $p(C) = \frac{C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3 \times C_5^0}{C_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88$

2)أ) حساب $p(X=1)$ و $p(X=3)$ ثم استنتاج قيم المتغير العشوائي X هي : $1 ; 2 ; 3$

$X = 1$ **:** " سحب 3 كرات بلون واحد "

$$p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$$

"$X=3$: سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة "

$$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$$

"$X=2$: سحب 3 كرات بلونين مختلفين "

$(B;B;\overline{B})$ أو $(N;N;\overline{N})$ أو $(R;R;\overline{R})$

1ط: $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$

2ط: $p(X=2)=1-\left[p(X=3)+p(X=1)\right]=\frac{55}{84}$

ب) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه : $+25\;;\;0\;;\;-25$،

$$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\frac{475}{84}\approx 5.65$$

بمأن : $E(Y)\succ 0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

ليكن الحدث F : سحب كرتان من U_2 بيضاوين

لدينا: $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ ، $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$

$$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$$

ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}\approx 0.55$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1)نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$

ليكن $z=x+iy$ حيث: $x\;;\;y$ عددان حقيقيان

(E) تكافئ $(x+iy)^2+2\left(x^2+y^2\right)-\frac{3}{4}=0$ تكافئ

$$\begin{cases}3x^2+y^2-\frac{3}{4}=0\ldots(1)\\ 2xy=0\qquad\ldots(2)\end{cases}$$ تكافئ $3x^2+y^2-\frac{3}{4}+2xyi=0$

(2)تكافئ $x=0$ أو $y=0$ ثم بالتعويض في المعادلة (1)

من أجل: $x=0$ يكون: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل: $y=0$ يكون: $x=\frac{1}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

ومنه: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i\;;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2)أ) كتابة كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي

$z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ ، $z_A+z_B=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب) نبين أن : $z_C{}^{2018}.\left(z_A+z_B\right)^{1439}=z_A+z_B$

$$z_C{}^{2018}.\left(z_A+z_B\right)^{1439}=\left(-\left(z_A+z_B\right)\right)^{2018}\left(z_A+z_B\right)^{1439}$$

$$=\left(z_A+z_B\right)^{3457}=e^{i\left(\frac{2\times 3457\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{6912+2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(2304+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=z_A+z_B$$

3)أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر $S\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)$:

$z'-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ ومنه: $z'=2iz-\frac{1}{2}+i$

ب)إيجاد لاحقتا النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب بالتشابه المباشر S:

$z_{B'}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i$ ، $z_{C'}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+2i$

4)نبين ان المبدأ O هو مركز ثقل المثلث ABC : لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0=z_O$

نعين (μ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$،

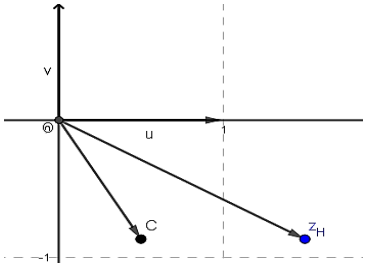
$M\in(\mu)$ معناه $3\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\right)=0$

معناه $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0$

ومنه: (μ) هي مستقيم يشمل المبدأ وشعاع الناظمي $\overrightarrow{\ }$

لاحقته: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ معادلته $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

4)إنشاء النقطة H ذات اللاحقة $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب:



لدينا:لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي 1،

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OC}$ هي $e^{i\frac{-\pi}{3}}$

ومنه: $\overrightarrow{OH}=\vec{u}+\overrightarrow{OC}$ ،

الشعاع $\overrightarrow{OH}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OC}$ و $\vec{u}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

دراسة اتجاه تغير الدالة h: h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث

$h'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x}$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-1;0[$ ، $[1;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

اذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)\succ 0$

II) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

1)أ) حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\underbrace{\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)}_{\to 0}-\underbrace{x}_{\to+\infty}-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0}\right)=-\infty$$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)}_{\to 0}-\underbrace{x}_{\to-\infty}-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0}\right)=+\infty$

ب)حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{2}.\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to+\infty}\left(\underbrace{-\ln(x^2)}_{\to-\infty}-x^2-2\right)=+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{2}.\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to-\infty}\left(\underbrace{-\ln(x^2)}_{\to-\infty}-x^2-2\right)=-\infty$$

تفسّير النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2)أ)نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $2x^2 f'(x)=-h(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{2x.x}{x^2}-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

ومنه: $2x^2 f'(x)=-\left(x^2-\ln(x^2)\right)=-h(x)$ ومنه: $f'(x)=\frac{-h(x)}{2x^2}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f **ثم تشكيل جدول تغيراتها :**

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)\prec 0$ ومنه:

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	B	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $3/2$	$\searrow$ 0	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ $-3/2$	$-\infty$

ج) نبين أن $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ **مستقيم مقارب للمنحنى** (C_f) **:**

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة لـ** (Δ): ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq 0$

يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
عدد و	حل	حل	حلين	حل	حل

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}\approx-0.37$	0	$\frac{1}{e}\approx 0.37$	$+\infty$
$-\ln x^2-2$	$-$	0	$+$ $\quad$ $+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)-y$	$+$	0	$-$ $\quad$ $+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{1}{e};-0.18\right)\right\}$ (C_f) تحت (Δ)

3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x **غير معدوم :**

$x\in\mathbb{R}^*$ و $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$:

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac{2}{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة f فردية .

تفسيرالنتيجة بيانيا: النقطة O مركز تناظر للمنحنى (C_f).

ب)نبين أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **على المجال** $]0.3;0.4[$: لدينا الدالة f معرفة ومستمرة (قابلة للإشتقاق)و رتيبة تماما (متناقصة تماما)على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec 0$ ، $f(0.3)\approx 0.53$ ؛ $f(0.4)\approx -0.41$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\alpha)=0$

استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا آخر** β **يطلب تعيين حصرا له:** بما أن النقطة O مركز تناظر لـ (C_f) و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0.3;0.4[$ فإن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها β بالنسبة للنقطة O حيث $0.3\prec\alpha\prec 0.4$ و عليه يكون $-0.4\prec\beta\prec -0.3$

4) أ) نبين أن المنحنى (C_f) **يقبل مماسين** (T_1) و (T_2) **يوازيان المستقيم** (Δ) **يطلب كتابة معادلتيهما:** $f'(x_0)=\frac{-1}{2}$

يكافئ $\frac{-\left(x_0^2-\ln(x_0^2)\right)}{2x_0^2}=\frac{-1}{2}$ ومنه: $\ln(x_0^2)=0$ أو $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\frac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\frac{-1}{2}x-1$

ب)إنشاء (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f):

ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m **عدد و إشارةحلول المعادلة** (E) **:** هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث: $(\Delta_m): y=-\frac{1}{2}x+m$

5)نبين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_k)

$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$

بما أن: $k(x)=f(x+1)+2$ فإن (C_k) هو صورة (C_f)

بانسحاب شعاعه : $\vec{V}=-\vec{i}+2\vec{j}$

6) أ) نبين ان الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{4}.2\ln\left(x^2\right).\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}-\frac{2}{x}\right)=f(x)$$

ومنه: F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

ب)إيجاد الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$:

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x\to F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\frac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$$x\to\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$$

ج) حساب التكامل: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda}f(x)dx$ حيث $\lambda\succ 1$

$$A(\lambda)=-\int_1^{\lambda}f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\lambda}$$

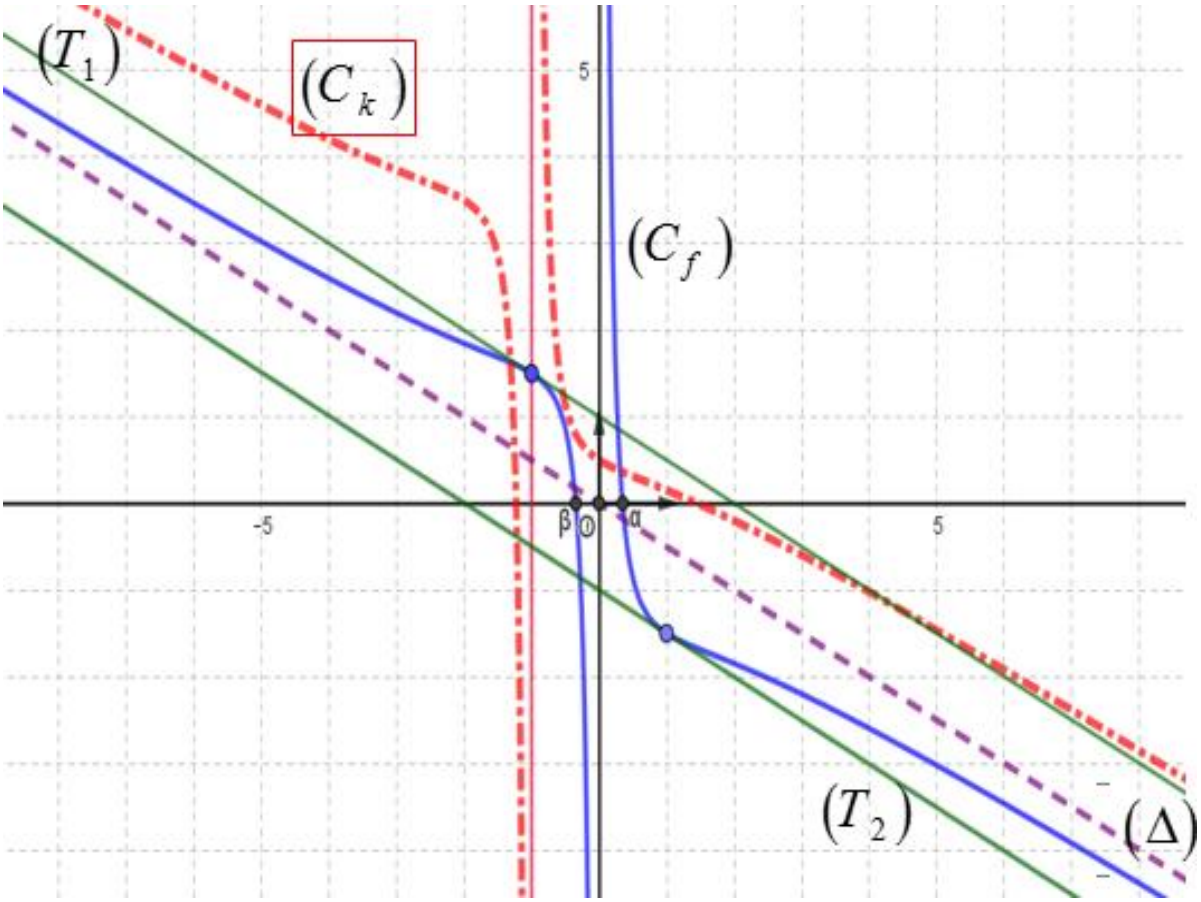
$$=\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\quad(u.a)$$

تفسير النتيجة هندسيا: $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\;;x=\lambda\;;y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$

بالتوفيق في البكالوريا



البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية **المدّة: 3 ساعات ونصف**

على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التّمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات منهم : 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين الكرات متماثلة و لا نفرق بينها باللمس . نسحب عشوائياعلى التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق

1) نعتبر الحدث A التالي : الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل .
و الحدث B : الحصول على كرتين من نفس اللون .

أ) بين أن $P(A)=\frac{13}{28}$ ، $P(B)=\frac{1}{4}$

ب) نضيف الى الصندوق n كرة بيضاء ، نعتبر الحدث C :الحصول على كرتين بيضاوين
بين أن : $P(C)=\frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$ ،ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p(C)$ و ماذا تستنتج .

2) نسحب عشوائيا و في أن واحد 3 كرات من الصندوق -وضعية الصندوق الأولى-و نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

ب) احسب التباين و الانحراف المعياري.

التّمرين الثاني: (4 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_0=\frac{3}{4}$ و $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}$.

1) برهن بالتراجعٍ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{1}{2}<u_n<1$.

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $t_n=\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)$

أ- بين أن المتتالية t_n هندسية أساسها 2 ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

4) أحسب الجداء $P_n=t_0\times t_1\times .....\times t_n$

أحسب المجموع $S_n=\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+.....+\frac{1}{t_n}$

التّمرين الثالث: (5 نقاط)

1) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النّقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$، $z_C=i\sqrt{3}$

أ) أكتب على الشكل الأسي z_A ، z_B، z_C ثم أحسب العدد $\left(z_A\right)^{2019}+\left(z_B\right)^{1440}+\left(z_C\right)^{2969}$

ب) أكتب على الشكل الأسي العدد $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

ت) استنتج طبيعة التحويل S الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C مبرزا عناصره المميزة.

3) لتكن G مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,\alpha);(C,1)\right\}$ حيث $\alpha\neq -2$ عيين قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC.

4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|\overline{z}+i\sqrt{3}\right|$.

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-2,+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+2)e^x$.

1) أدرس تغيرات الدّالّة g، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α بحيث $-0,5<\alpha<-0,4$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-2,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\ln\left(x+2\right)$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]-2,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g\left(x\right)}{x+2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أكتب معادلة (Δ) مماس المنحنى $\left(C_f\right)$ عند مبدأ المعلم O

4) أنشئ $\left(C_f\right)$ و (Δ). تعطى $f(\alpha)\simeq 0,2$

5) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ) و $x=0$ و $x=1$.

6) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيث $e^x+\ln\left(\dfrac{m+2}{x+2}\right)=e^m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التّمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن h دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$. و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ و $u_0=5$

أ- مثل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

2) بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ أنه $h'(x)=\dfrac{9}{(x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

أ- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

ب- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n. عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

5) أحسب الجداء $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times.....\times e^{v_n}$

التّمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النّقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

1) أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

2) ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي (Δ) $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

بين أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC)، ثم أكتُب معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC).

3) نسمي H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC).

بين أن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$

4) نعتبر $(T_1),(T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء و التي تحقق :

$(T_1):(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ و $(T_2):\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1),(T_2)$، ثم عين طبيعة تقاطعهما .

التّمرين الثالث: (05 نقاط) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في مايلي النّقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = 4-3i$ ، $z_B = 4+3i$ و $z_C = 7$ على التّرتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :

1) المعادلة $z^3 - 15z^2 + 81z - 175 = 0$ للمتغيّر المركّب z حيث $z_0 = 7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

أ) $S = \{7, 4-3i, 4+3i\}$ ب) $S = \{7, -4-3i, -4+3i\}$ ج) $S = \{-7, 4-3i, 4+3i\}$

2) العدد $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^{2018}$ يساوي:

أ) 1 ب) 0 ج) -1 .

3) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلّث ABC

أ) قائم في C ب) قائم في C و متساوي الساقين ج) متساوي الساقين .

4) العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 4$ و يُحوّل النّقطة C إلى النّقطة B فإن العبارة المركبة لهذا التحويل :

أ) $z' = iz + 4 - 4i$ ب) $z' = 2iz + 3 - 4i$ ج) $z' = iz + 3 - 4i$.

5) (T) مجموعة النّقط M ذات اللاّحقة z ، من المستوي المركّب حيثُ يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيّليّاً صرفاً جزؤه التّخيّلي موجب.هي :

أ) المستقيم (AB) ب) دائرة قطرها $[AB]$ ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النّقطتين B و C

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالّة العدديّة المُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

1) أدرس تغيُّرات الدّالّة g ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $1 < \alpha < 2$

3) استنتج اشارة $g(x)$ من أجل كل x من $]0,+\infty[$.

II. لتكن f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. وحدة الطول : محور الفواصل $1cm \to 1$، محور التراتيب $1 \to 5cm$.

1) أحسُب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ- بين أنّه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ أن $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4) أنشئ (Δ) و (C_f). تعطى $f(\alpha) = 0,4$

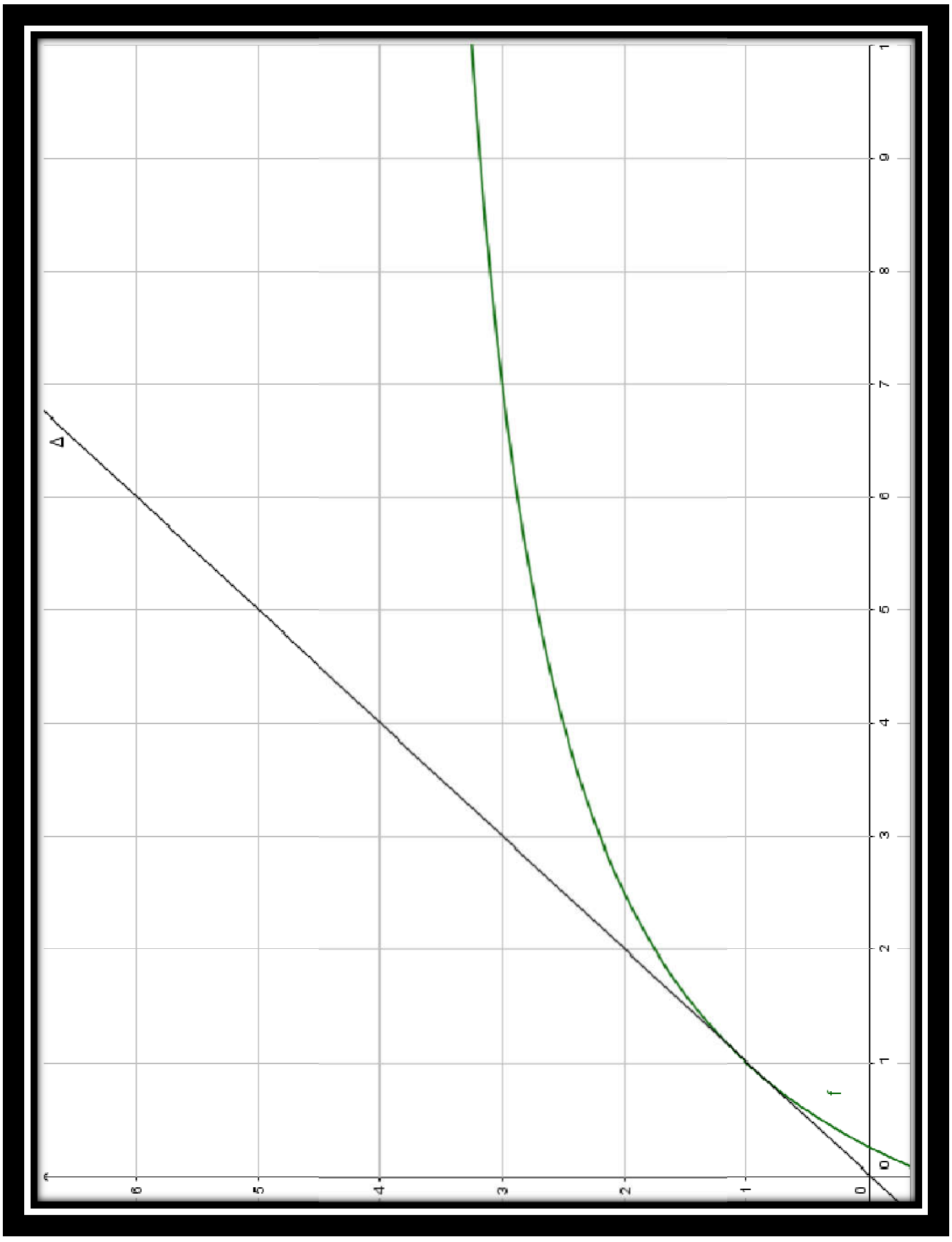
5) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيثُ $x^2 + x + 2\ln x = m(x^3 + x^2)$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا 2019

الأستاذة

الملحق: خاص بالتمرين الأول الموضوع الثاني



التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2019 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الإحتمالات) التنقيط

1 I) أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_8^2 = \frac{(8)!}{(8-2)!} = 8\times 7 = 56$.

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

1) الحدث A إحتمال سحب كرة بيضاء على الأقل :

$$P(A) = \frac{A_2^1\times A_6^1 + A_6^1\times A_2^1 + A_2^2}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

الحدث B إحتمال سحب كرتين من نفس اللون:

$$P(B) = \frac{A_3^2 + A_3^2 + A_2^2}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

ب❖ الحدث C إحتمال سحب كرتين بيضاوين بعد اضافة n كرة بيضاء :

أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{8+n}^2 = \frac{(8+n)!}{(6+n)!} = \frac{(8+n)(7+n)(6+n)!}{(6+n)!} = (8+n)(7+n)$$

ثانيا نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب :

$A_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)!}{(n)!} = (n+2)(n+1)$.

إذن إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو: $P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ ، ثم نفسر النتيجة :

$$\lim_{n\to\infty} P(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$.

التفسير : الحادثة " سحب كرتين بيضاويين " تكون حادثة أكيدة لما n يكون كبيرا بالقدر الكافي .

II) 1) قيم المتغير العشوائي X :

المتغير العشوائي يعبّر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : $(X=0),(X=1),(X=2),(X=3)$.

2) تعيين قانون الإحتمال ،و حساب أمله الرياضي :

- حالة $(X=0)$ أي الكرات المسحوبة ا من لون اخر ، إذن : $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}$ ، أي :

- حالة $(X=1)$ أي سحب كرة حمراء وكرتين من الباقي $P(X=1)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{30}{56}$

. حالة $(X=2)$ أي سحب كرتين حمراء وكرة من الباقي $P(X=2)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$

حالة $(X=3)$ أي سحب ثلاثة كرات حمراء $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X)=\sum_{i=0}^{3}X_i.P_i$ ، أي : $E(X)=\frac{63}{56}$.

حساب التباين : $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$ ، أي : $V(X)=\frac{99}{56}-\left(\frac{63}{56}\right)^2=0,36$

حساب الانحراف المعياري : $\delta(X)=\sqrt{V(X)}$ ، أي : $\delta(X)=\sqrt{0,36}=0,6$

التنقيط	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية)

لدينا : $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}$ و $u_0=\frac{3}{4}$:

$P(n):\frac{1}{2}<u_n<1$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{3}{4}$ أي : $\frac{1}{2}<u_0<1$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $\frac{1}{2}<u_n<1$ صحيحة و نبين أن : $\frac{1}{2}<u_{n+1}<1$.

- لدينا فرضا أنّ: $\frac{1}{2}<u_n<1$، إيكفي أن نبرهن أن : $u_{n+1}<1$ و $\frac{1}{2}<u_{n+1}$.

نبيّن أنّ : $u_{n+1}<1$.

نحسب $u_{n+1}-1$:

$$u_{n+1}-1=\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}-1=\frac{u_n^2-2u_n^2+2u_n-1}{2u_n^2-2u_n+1}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{2u_n^2-2u_n+1}=\frac{-\left(u_n-1\right)^2}{2u_n^2-2u_n+1}$$ ، أي

أنّ : $u_{n+1}<1$

نبيّن أنّ : $\frac{1}{2}<u_{n+1}$. **نحسب** $u_{n+1}-\frac{1}{2}$:

$u_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2u_n^2-2u_n^2+2u_n-1}{2\left(2u_n^2-2u_n+1\right)}=\frac{2u_n-1}{2\left(2u_n^2-2u_n+1\right)}$ ، أي أنّ : $\frac{1}{2}<u_{n+1}$

،وعليه : $\frac{1}{2}<u_{n+1}<1$.

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}-u_n=\frac{u_n^2+2u_n^2-2u_n^3-u_n}{2u_n^2-2u_n+1}=\frac{u_n\left(-2u_n^2+3u_n+1\right)}{2u_n^2-2u_n+1}$ ،

لدينا $\frac{1}{2}<u_n<1$ ، لدينا : $-2u_n^2+3u_n+1>0$ لما $\frac{1}{2}<u_n<1$

و منه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3)إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و حساب نهايتها:

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ 1 ، إذن هي متقاربة.

3)أ) بيان أن (t_n) متتالية هندسية :

لدينا: $t_n=\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)$ ،أي :

$$t_{n+1}=\ln\left(\frac{1-u_{n+1}}{u_{n+1}}\right)=\ln\left(\frac{1-\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}\right)=\ln\left(\frac{\frac{u_n^2-2u_n+1}{2u_n^2-2u_n+1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2-2u_n+1}}\right)=\ln\frac{\left(1-u_n\right)^2}{\left(u_n\right)^2}=\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)^2=2\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)=2t_n$$

و منه : $t_{n+1}=2.t_n$ ، إذن المتتالية (t_n) هندسية أساسها $q=2$ ، و حدها الأول :

$t_0=\ln\left(\frac{1-u_0}{u_0}\right)=\ln\left(\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$.

ب) التعبير عن t_n بدلالة n و u_n بدلالة n :

- عبارة t_n : $t_n=t_0\times q^n$ ، أي : $v_n=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\times(2)^n$.
- عبارة u_n : لدينا $t_n=\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)$ أي: $e^{t_n}=\frac{1-u_n}{u_n}$ أي: $u_ne^{t_n}=1-u_n$ ، أي :

$u_ne^{t_n}+u_n=1$ أي: $u_n\left(e^{t_n}+1\right)=1$ أي: $u_n=\frac{1}{\left(e^{t_n}+1\right)}$ أي: $u_n=\frac{1}{\left(e^{t_n}+1\right)}$

$$u_n = \frac{1}{\left(e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)(2)^n}+1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}$$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n):

نعلم أنّ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = 0$ **، لأنّ** $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right)\times(2)^n = -\infty$ **: و** $u_n = \frac{1}{\left(e^{t_n}+1\right)}$**، و منه:**

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

5) حساب الجداء المجموع S_n :

حساب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \ldots\ldots \times t_n$ **تكافئ** $P_n = \left(t_0 \times q^0\right)\times\left(t_0 \times q^1\right)\ldots\ldots\times\left(t_0 \times q^1\right)$

تكافئ $P_n = \left(t_0 \times t_0 \times \ldots . t_0\right)\times\left(q^0 \times q^1 \times \ldots\ldots \times q^n\right)$ **تكافئ**

$$P_n = \left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{n+1}\times(2)^{\frac{(n)(n+1)}{2}} \text{ تكافئ } P_n = \left(t_0\right)^{n+1}\times\left(q^{0+1+2+\ldots\ldots+n}\right) = \left(t_0\right)^{n+1}\times\left(q\right)^{\frac{(n)(n+1)}{2}}$$

حسب المجموع

$$S_n = \frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_1}+\ldots\ldots+\frac{1}{t_n} = \frac{1}{t_0\times q^0}+\frac{1}{t_0\times q^1}+\ldots\ldots+\frac{1}{t_0\times q}$$

تكافئ $S_n = \frac{1}{t_0}\left(\frac{1}{q^0}+\frac{1}{q^1}+\ldots\ldots+\frac{1}{q^n}\right)$ **تكافئ** $S_n = \frac{1}{t_0}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)}\right)$

$$S_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة) التنقيط

1) **حل، في مجموعة الأعداد المركّبة** $\mathbb{C}$**، المعادلة** $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$.

ب) المستوي المركّب منسوب إلى لدينا $P(z)=0$ **يكافئ** $\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+-2z+4\right)=0$ **يكافئ**

$$\begin{cases}\left(z-i\sqrt{3}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ \left(z^2+-2z+4\right)=0\ldots.(2)\end{cases}$$

من المعادلة (1) **نجد أنّ** $z=i\sqrt{3}$.

المعادلة (2) **من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز** Δ **حيثُ** $\Delta=-12=12i^2$**، إذن**

فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1-i\sqrt{3}$ **و**

$z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 + i\sqrt{3}$، **و عليه مجموعة حلول المعادلة** $P(z) = 0$ **هي**

$S = \left\{i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\right\}$.

أ) ❖ **كتابة على الشكل الأسي** z_A ، z_B ، z_C **ثم أحسب العدد** $\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969}$

$z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $z_C = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

- **حساب العدد** $\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969}$

$$\left(z_A\right)^{2019} + \left(z_B\right)^{1440} + \left(z_C\right)^{2969} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1440} + \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2969}$$

$$\left(2^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{3}}\right) + \left(2^{1440}e^{-i\frac{1440\pi}{3}}\right) + \left(\sqrt{3}^{2969}e^{i\frac{2969\pi}{2}}\right) = 2^{2019}e^{i673\pi} + 2^{1440}e^{-i480\pi} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(1484\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$2^{2019}e^{i\pi} + 2^{1440}e^{i0} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2^{2019} + 2^{1440} + \sqrt{3}^{2969}i$$

ب) **كتابة على الشكل الأسي العدد** $L = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **ثم تحديد طبيعة المثلث** ABC.

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |L| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **أي أنّ** $AC \neq BC$، **كذلك لدينا**

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(L) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ **مع** $k \in \mathbb{Z}$، **و منه** $\left(\overrightarrow{AB}, AC\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ **مع** $k \in \mathbb{Z}$، **و عليه يكون المثلّث** ABC **قائم في** A.

ت) **استنتاج طبيعة التحويل** S **الذي مركزه** A **و يحول النقطة** B **إلى النقطة** C **و عناصره المميزة.**

لدينا $\begin{cases} z_A = az_A + b \ldots.(1) \\ z_C = az_B + b \ldots.(2) \end{cases}$، **بطرح المعادلة** (1) **من المعادلة** (2) **نحصل على**

$z_C - z_A = a\left(z_B - z_A\right)$ **و منه** $a = L = \dfrac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **إذن، و عليه التحويل** S **تشابه مباشر نسبته**

$|L| = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **و زاويته** $\arg(L) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ **و مركزه** A .

ب) **لدينا** $z_D = iz_B + 4 - 4i$ **و منه** $z_D = 7$.

3) **لتكن** G **مرجح الجملة** $\left\{(A,1);(B,\alpha);(C,1)\right\}$ **حيث** $\alpha \neq -2$ **عيين قيمة** α **حتى تنتمي النقطة** G **إلى المتوسط المتعلق بالضلع** $[BC]$ **في المثلث** ABC.

لاحقة النقطة G **هي** $z_G = \dfrac{z_A + \alpha z_B + z_C}{\alpha + 2} = \dfrac{1 + \alpha + i(2 - \alpha)\sqrt{3}}{\alpha + 2}$ **لتكن النقطة** D

منتصف الضلع $[BC]$ إذن $z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1}{2}$

حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC، يجب أن يكون العدد $K = \frac{z_G - z_A}{z_G - z_D}$ حقيقيا بحتا و حتي يكون كذلك $\overline{K} = K$ تكافئ $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ تكافئ $\alpha = -2$ مرفوض أو $\alpha = 1$

4) تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|\overline{z} + i\sqrt{3}\right|$ تكافئ $\left|i\right|\left|(z - i\sqrt{3} - 1)\right| = \left|\overline{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ $\left|i(z - i\sqrt{3} - 1)\right| = \left|\overline{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ $\left|z - \left(i\sqrt{3} + 1\right)\right| = \left|\overline{z} - \left(-i\sqrt{3}\right)\right|$ تكافئ $|z - z_A| = |\overline{z - z_C}|$ تكافئ $|z - z_A| = |\overline{z} - \overline{z}_c|$ تكافئ $|z - z_A| = |z - z_C|$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AC]$

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة الأسية) التنقيط

الجزء الأول:

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-2;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x) = (x+3)e^x$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $g'(x) \geq 0$.

الخلاصة: الدالة g متزايدة على $]-2;+\infty[$.

جدول التغيرات الدالة g

x	-2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$	-1 ↗	$+\infty$

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^x - 1 == +\infty$$

$$\lim_{x\to-2} g(x) = \lim_{x\to-2} (x+2)e^x - 1 = -1$$

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2;+\infty[$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $]-2;+\infty[$ و لدينا، .

بما أنّ : $-0,5 < \alpha < -0,4$ ➷ أي $\begin{cases} g(-0;5) = -0, \\ g(-0,4) = +0, \end{cases}$ ، و بتالي حسب $g(-0,5) \times g(-0,4) < 0$

نظرية القيم المتوسطة فإنه $g(x) = 0$: تقبل حل وحيد α على $]1,14;1,15[$ $g(\alpha) = 0$

إشارة $g(x)$:-

x	-2	α	$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	$+$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x) = e^x - \ln(x+2)$

حساب $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2}\left[e^x - \ln(x+2)\right] = +\infty$:

المستقيم الذي معادلته $x=-2$ **مقارب عمودي لـ** (C_f)

نهاية f **عند** $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x-\ln(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left[\frac{e^x}{x+2}-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right]=+\infty$$

2) أ) **بيان أنّه من أجل كل** $x\in]-2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$:

الدالة f **قابلة للإستقاق على** $]0;+\infty[$ **و دالتها المشتقة هي :**

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}=\frac{xe^x+2e^x-1}{x+2}=\frac{(x+2)e^x-1}{x+2}=\frac{g(x)}{x+2}$$

ب) **إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة** f **، و تشكيل جدول تغيّراتها :** ---------**نلاحظ أنّ إشـــارة** $f'(x)$ **من إشـــارة** $g(x)$.

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$

- **الدالة** f **متناقصة تماما على** $]-2;\alpha]$
- **الدالة** f **متزايدة تماما على** $[\alpha;+\infty[$

- **جدول التغيرات**

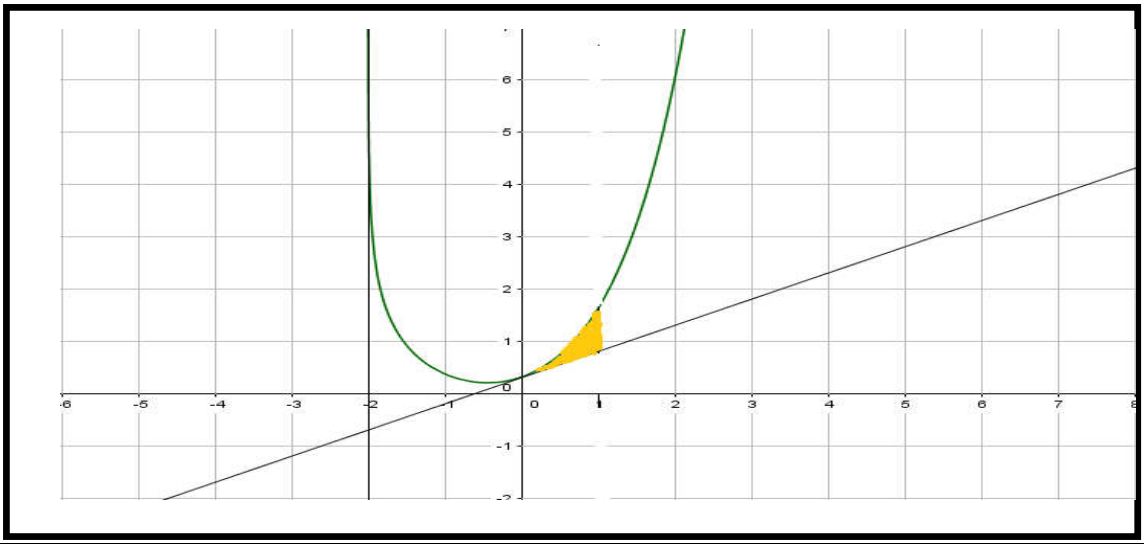
x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

.

3) **كتابة معادلة المماس** (T) **لـ** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 0 :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ **أي** $(\Delta): y=\dfrac{1}{2}x+1-\ln 2$

4) **رسم كلا من** (Δ) **و المنحنى** (C_f) :



الجزء الثالث :

5) حساب بـ cm^2 **مساحة الحيز المحدد بـ** (C_f) **وَ** (T) **و محور التراتيب و** $x=1$ **:**

$A=\int_0^1\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)dx$ ، **أي :**

$A=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\ln(x+2)dx-\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+1-\ln(2)\right)dx$

$A=\left[e^x-(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{4}x^2+x\ln 2\right]_0^1\approx 0,25u.c^2$.

المناقشـــــــة بيانيّاً، $e^x+\ln\left(\frac{m+2}{x+2}\right)=e^m$ **تكـــــافئ** $e^x+(m+2)-\ln(x+2)=e^m$ **تكـــــافئ**

$e^x-\ln(x+2)=e^m-(m+2)$ **تكافئ** $f(x)=f(m)$ **وهي مناقشة أفقية حلولها فواصل نقط**

تقاطع (C_f) **مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة** $y=f(m)$

من أجل $m=\alpha$ **المعادلة تقبل حلا مضاعفا**

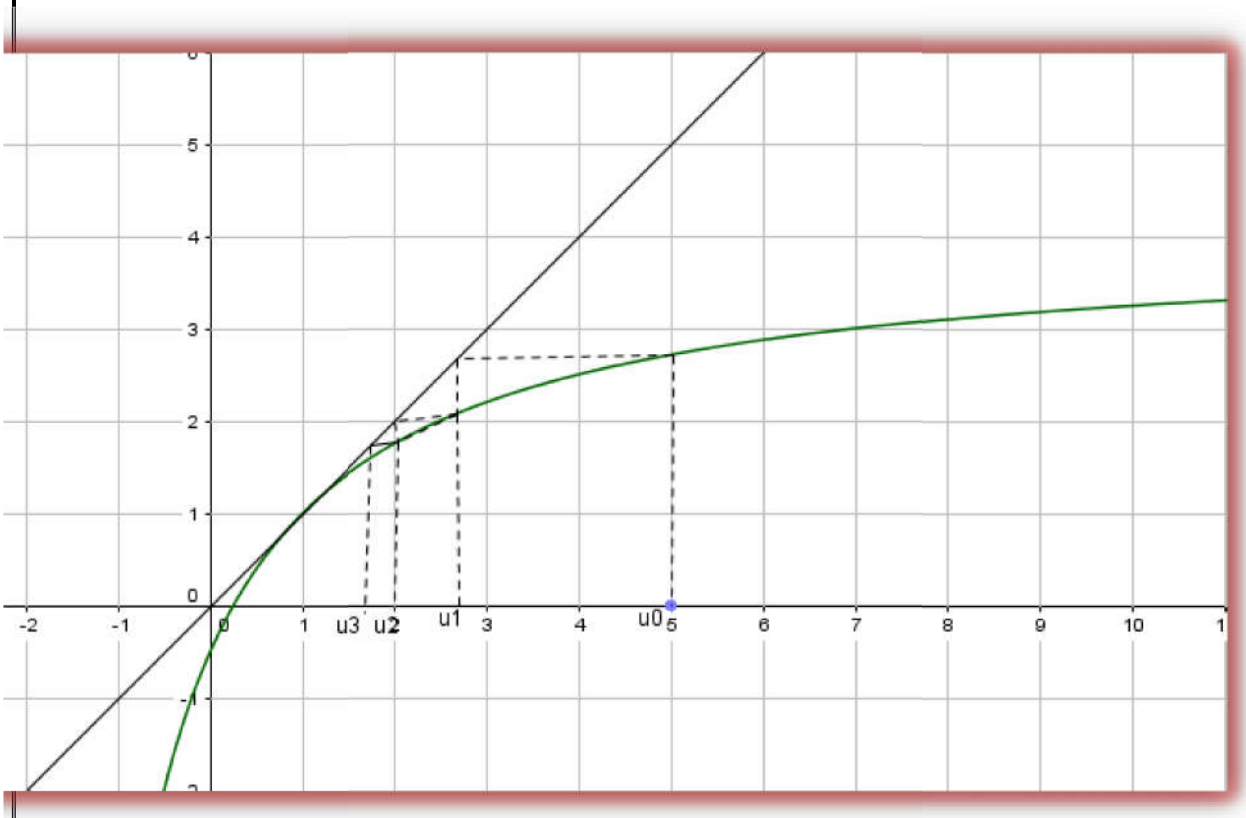
من أجل $m\in]-2;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ **المعادلة تقبل حلا ن متمايزان**

إعداد الأستاذ : زايدي علاء الدين

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2019 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) | **(المتتاليات)** | **التنقيط**

1- 1 أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 \succ u_1 \succ u_2 \succ u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما
بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ أنه $h'(x) = \dfrac{4(x+2)-1(4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{8+1}{(x+2)^2}$ **تكافئ**

$h'(x) = \dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$ **ومنه الدالة h متزايدة تماما على** $]0,+\infty[$

3) **أ - البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.**

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي
$u_{n+1} > 1$

حسب فرضية التراجع $u_n > 1$ نلاحظ أن $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ المتتالية u_n متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية معناه أن $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{3u_n + 4}} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n - 3}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1}\right) = \frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n: $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{7}\right)n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $v_n(u_n - 1) = 1$ تكافئ

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{7}\right)n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

تعين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.

4) حساب الجداء $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \ldots\ldots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \ldots + v_n} = e^{\frac{(n+1)}{2}(v_0 + v_n)}$

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الهندسة الفضائية) التنقيط

لدينا: $A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$.

1) أ) بيان أن النقط $C;B;A$ تعيّن مستويا: ———————

1- لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\left(\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-5}{1}\right)$. أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا، و منه النقط $C;B;A$ تعيّن مستويا.

2) المعادلة الديكارتية هي .....

لدينا (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي $(\Delta)\ t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC)، معناه أن $\vec{n}_{(ABC)}=\vec{u}_{(\Delta)}$

نفرض أنّ $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ و منه $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ إذن $\begin{cases}5a+2b-4c=0\\a+b+c=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}b=\dfrac{-3}{2}a\\c=-a-b\end{cases}$

إذن $\begin{cases}a=a\\b=-\dfrac{3}{2}a\\c=\dfrac{1}{2}a\end{cases}$ وبالتالي $\vec{n}(a,\dfrac{-3}{2}a,\dfrac{1}{2}a)\quad a\in\mathbb{R}^*;$ يوجد عدد غير منته من الأشعة تكون ناظمية للمستوى (ABC) من أجل $a=2$ فإنّ $\vec{n}(2,-3,1)$ معناه أن $\vec{n}_{(ABC)}=\vec{u}_{(\Delta)}$ أي أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC)

المعادلة الديكارتية هي $(ABC):2x-3y+z+d=0$ وبما أن $A\in(ABC)$ فإنّ $(ABC):2x-3y+z-4=0$

3) احداثيات H : ——————————————————

لدينا H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC). أي أن إحداثيات H تحقق الجملة

$$\begin{cases}x=-7+2t.....(1)\\y=-3t.....(2)\\z=4+t.....(3)\\2x-3y+z-4=0.....(4):(ABC)\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

بالتعويض نجد $t=1$ و بتعويض قيمتها في المعادلات نجد $H(-5;-3;5)$

H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$ لدينا $\alpha+\beta+\gamma=-2+2-1\neq 0$ إذن H موجود و وحيد

$$\begin{cases}x_H=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=-5\\y_H=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=-3\\z_H=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=5\end{cases}$$

تعين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1),(T_2)$، ثم عين طبيعة تقاطعهما .

$(T_1):(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ تكافئ $(\overrightarrow{MH})(\overrightarrow{BC})=0$ هي المستوي الذي ناظمه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة H المعادلة الديكارتية له هي $6x+3y-3z+d=0$ وبما أن $G\in(T_1)$

فإنّ $(T_1): 2x+y-z+18=0$

تعين طبيعة (T_2)

$(T_2): \left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

تكافئ $MH=\sqrt{29}$ إذن مجموعة النقط (T_2) هي سطح كرة مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

$$d\left(H;(s)\right)=\frac{\left|ax_H+by_H+cz_H+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|2(-5)+-3+-5+18\right|}{\sqrt{6}}=0$$

- بما أن $d(H;(S))\prec R$ فإن المستوي يقطع سطح الكرة (S) في دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها r

حيث: $r=\sqrt{R^2-d^2}$

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

إختيار من متعدد

1) لدينا $P(7)=0$، باستخدام خوارزميّة القسمة الإقليدية نجد أنّ $P(z)=(z-7)(z^2-8z+25)$.

ت) لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-7)(z^2-8z+25)=0$ يكافئ $\begin{cases}z-7=0.....(1)\\z^2-8z+25=0....(2)\end{cases}$

من المعادلة (1) نجد أنّ $z=7$.

المعادلة (2) من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-36$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{7,4-3i,4+3i\}$. الاقتراح - أ-

2) العدد $\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)^{2018}=i^{2018}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2018}=e^{i\frac{2018\pi}{2}}=e^{i1009\pi}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

الاقتراح - ج-

3) المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين. الاقتراح - ب-

لدينا $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$ و منه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$، كذلك لدينا $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|i|=1$ أي أنّ $AC=BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و منه $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و عليه يكون المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين.

4) أ) العبارة المركّبة للدّوران R من الشكل $z'=az+b$.

لدينا $\begin{cases}z_\Omega=az_\Omega+b....(1)\\z_B=az_C+b....(2)\end{cases}$، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_B-z_\Omega=a(z_C-z_\Omega)$ و منه $a=i$ إذن $b=4-4i$، و عليه العبارة المركّبة للدّوران R هي

$z' = iz + 4 - 4i$. الاقتراح - أ-

5) العدد $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيّلي صرف جزؤه التّخيّلي موجب يعني أنّ $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أنّ

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النّقطتين B و

C و الزّاوية $\widehat{MBC}$ موجّهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح -ج-

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط)	(الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

1 دراسة تغيُّرات الدّالّة .....

تعيين نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)\right] = -\infty \text{ ،.}$$

دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها :

ـــــ ة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(4x^2+5x+1)}{(2x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$.

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

❖

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2;+\infty[$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $]0;+\infty[$ و لدينا، .

بما أنّ : $1 < \alpha < 2$: $\begin{cases} g(1) = 0,66 \\ g(2) = -0,09 \end{cases}$ أي $g(1) \times g(2) < 0$ ، و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة

فإنه $g(x) = 0$: تقبل حل وحيد α على $]1;2[$ $g(\alpha) = 0$

❖ إشـارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

حساب $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{x^2+x}=-\infty$:

المستقيم الذي معادلته $x=0$ **مقارب عمودي لـ** (C_f)

نهاية f **عند** $+\infty$: ----------

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\ln x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{2}{x+1}\times\dfrac{\ln x}{x}\right]=0$ **المستقيم الذي معادلته** $y=0$ **مقارب أفقي لـ** (C_f)

2) **أ) بيان أنّه من أجل كل** $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$: ----------

الدالة f **قابلة للإستقاق على** $]0;+\infty[$ **و دالتها المشتقة هي :**

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x^2+x)-2x\ln x}{(x^2+x)^2}=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}g(x)$$

ت) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f **، و تشكيل جدول تغيّراتها :** ----------

نلاحظ أنّ إشـــارة $f'(x)$ **من إشـــارة** $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$

- **الدالة** f **متزايدة تماما على** $]0;\alpha[$
- **الدالة** f **متناقصة تماما على** $]\alpha;+\infty[$

- **جدول التغيرات**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

.

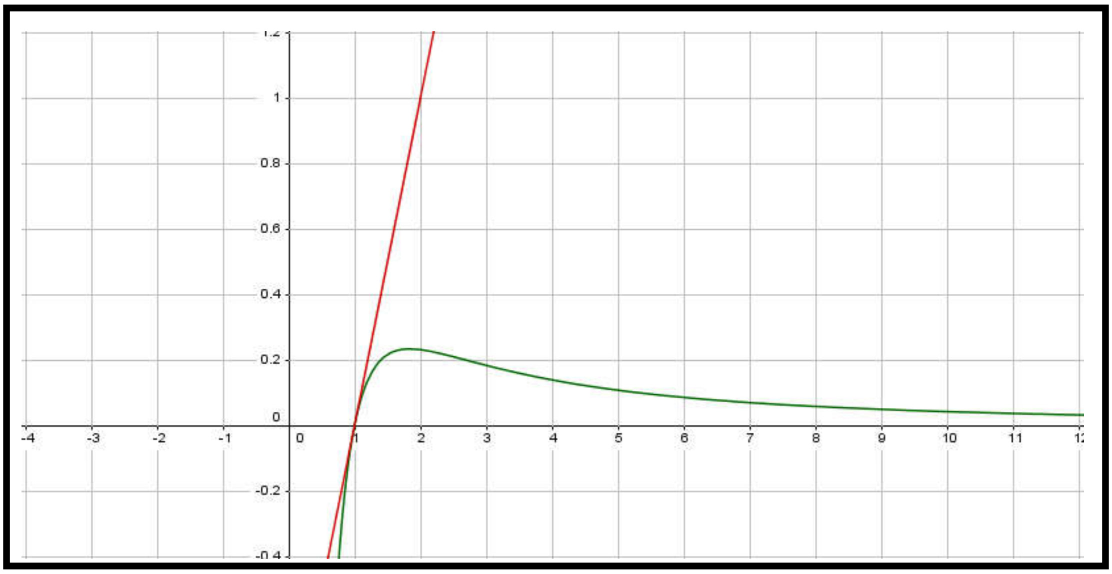
❖

3) **كتابة معادلة المماس** (Δ) **لـ** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1 : ----------

$(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ،

أي : $(\Delta): y=x+1$ ، **لأنّ :** $\begin{cases} f'(1)=1 \\ f(1)=0 \end{cases}$.

4) رسم كلا من (Δ) و المنحني (C_f) :



الجزء الثالث :

المناقشة بيانيًا، $x^2+x+2\ln x = m(x^3+x^2)$ تكافئ $x^2+x+2\ln x = mx(x^2+x)$ تكافئ

$\frac{x^2+x}{(x^2+x)}+\frac{2\ln x}{(x^2+x)} = mx$ تكافئ $\frac{2\ln x}{(x^2+x)} = mx-1$ تكافئ $f(x)=mx-1$ وهي مناقشة

دورانية حلولها فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y=mx-1$ الذي يدور حول نقطة ثابتة $(0;-1)$

من أجل $m\in]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m\in]0;1[$ المعادلة تقبل حلان متمايزان

من أجل $m=1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m\in]1;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا

إعداد الأستاذ : زايدي علاء الدين

بالتوفيق في البكالوريا 2019 إن شاء الله

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية:مفدي زكرياء – الأزهرية **الشعبة : ثالثة علوم تجريبية**

إمتحان بكالوريا تجريبية **دورة ماي: 2019**

إختبارفي مادة: الرياضيات **المدة: 03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$.

1/ أ) تحقق أنّ : $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بيّن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \dfrac{1}{3}$.

2/ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{6}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n.

3/ بين أنّ : $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ من أجل كل عدد طبيعي n ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4/ ليكن المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين M_1 و M_2 بحيث النقط O, M_1, M_2 مختلفة مثنى مثنى و ليست في إستقامية ، z_1, z_2 لاحقتا النقطتين M_1, M_2 على الترتيب .

M النقطة ذات اللاحقة z حيث : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$.

1/ أ) بيّن أنّ : $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$.

ب) استنتج أنّ M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلّث OM_1M_2 .

2/ أثبت أنّه إذا كان :$z_2 = \overline{z_1}$ فإنّ M تنتمي إلى حامل محور الفواصل .

3/ نفرض أنّ M_2 هي صورة M_1 بالدوران الذي مركزه O و زاويته α حيث $\alpha \in]0, \pi[$.

أ) أحسب z_2 بدلالة z_1 و α .

ب) استنتج أنّ M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$.

4/ θ عدد حقيقي من المجال $]0, \pi[$ ، z_1 و z_2 هما حلي المعادلة : $6t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$.

أ) دون حساب z_1و z_2 ، بيّن أنّ : $z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

ب) أكتب z على الشكل المثلثي بدلالة θ .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نرمي زهر نرد متوازن ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 ، المرة الأولى و نسجل الرقم α ، ثمّ نرميها ثانية و نسجل الرقم β .

1/ أحسب إحتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

أ) A : الرقمان α و β يحققان المساواة $|2\alpha+1|=\beta$.

ب) B: الرقمان α و β يحققان المتباينة : $|\alpha-\beta|<1$

2/ نكتب الآن بالرقمين α و β المعادلة (E) التالية : $x^2+\alpha x+\beta=0$ و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رميتين عدد حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$.

أ) عين القيم الممكنة لـ X .

ب) عيّن قانون إحتمال X .

ج) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدّالّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و فسّر النتائج بيانياً .

2/ أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f''(x)=\dfrac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$ ، ثمّ استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما .

3/ $\alpha\in]0;+\infty[$ ، A نقطة من (C_f) فاصلتها α و (T_α) المماس لـ (C_f) عند A .

أ) بيّن أنّ (T_α) يمر من المبدأ إذا وفقط إذا كان : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.

ب) استنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمران من المبدأ ، ثمّ عيّن معادلة كل من (T_a) و (T_b) .

4/ أرسم (T_a) ؛ و (T_b) و (C_f) .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدَد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التّالية : $f(x)=mx$.

6/ من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع : $I_n=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln(x)^n}{x^2}\mathrm{d}x$.

أ) باستخدام التّكامل بالتجزأة بيّن أنّ : $I_1=1-\dfrac{3}{e^2}$.

ب) باستخدام التّكامل بالتجزأة بيّن أنّ : $I_{n+1}=\dfrac{-2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$.

ج) استنتج قيمة I_2 ، ثم فسرها هندسيا .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$P(z)$ كثير حدود في $\mathbb{C}$ معرّف بـــ : $P(z)=z^3-(2\sin\theta+i\cos\theta)z^2+(1+i\sin 2\theta)z-i\cos\theta=0$ مع : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1/ بيّن أنّ المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً z_0 يطلب تعيينه .

2/ أ) عيّن العددين الحقيقيين α,β حيث : $P(z)=(z-i\cos\theta)(z^2+\alpha z+\beta)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 هو الحل الثالث .

ب) أكتب بدلالة θ الشكل الأسي للأعداد المركّبة z_0 ، z_1 و z_2 .

3/ في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، و C التي لواحقها على التّرتيب $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، و $z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

أ) علّم النقط A ، B ، و C ، ثمّ عيّن طبيعة المثلّث ABC .

ب) برهن أنّ النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;-1)\}$.

4/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي λ ، مجموعة النقط M ذات الاحقة z حيث : $2MA^2+MB^2-MC^2=\lambda$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على كريتين تحملان الرّقم 1 و أربع كريات تحمل الرقم 2 ، و كيس U_2 يحتوي على 7 كريات منها 3 حمراء و الباقي صفراء (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)، نسحب عشوائياً كريّة من الكيس U_1 و نسجّل رقمها ، إذا كان الرّقم 1 نقوم بسحب كريّة من الكيس U_2 و إذا كان الرّقم 2 نقوم بسحب كرتين في آنٍ واحد من الكيس U_2.

1/ مثّل الوضعية بشجرة إحتمالات مناسبة .

2/ أحسب إحتمال الحادثتين التّالتين :

A : الكريّة المسحوبة تحمل الرّقم 1 . B : الكريّة المسحوبة تحمل الرّقم 2 .

3/ نعتبر الحادثتين التّاليتين : C ؛ الحصول بالضبط على كريّة حمراء ، D : الحصول على كريتين حمراوين .

أ) بيّن أنّ : $P(C)=\frac{11}{21}$ و $P(D)=\frac{2}{21}$.

ب) أحسب الإحتمال الشرطي $P_C(A)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتين ديكارتيتين $x+y-z-2=0$ و $2x+y+3z=0$ على التّرتيب ، و (Δ) المستقيم المعرّف بتمثيل وسيطي التالي : $\begin{cases}x=2k\\y=k-2\\z=-k\end{cases}$, $(k\in\mathbb{R})$.

1/ أ) عين تمثيلا وسيطيا لـ (P) ثمّ بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان .

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا لـ (D) مستقيم التقاطع بين (P) و (Q) .

2/ أدرس الوضع النسبي بين (D) و (Δ) .

3/ نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2}$.

أ) أدرس تغيّرات الدّالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

ب) عيّن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها تحقق الجملة : $\begin{cases} x=2f(\alpha) \\ y=f(\alpha)-2 \quad (\alpha>0) \\ z=-f(\alpha) \end{cases}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{e^x+1}$.

1 أ) تحقق أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^{-x}+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.

ب) استنتج أنّ f فردية .

2/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3 أ) بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب) استنتج إتجاه تغير f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

ج) استنتج أنّ : $1-\dfrac{2}{e^x+1}\leq\dfrac{1}{2}x$ من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب .

4/ أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)\right]=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب) استنتج معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

5/ أ) أنشئ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (C_f) و مستقيماته المقاربة .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$2f(x)=-x+|m|$.

II) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1} \end{cases}$.

1/ بين بالتراجع أنّ : $u_n>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

2/ أ) تحقق باستعمال نتيجة سؤال سابق في الجزء الأوّل أنّ : $u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

3/ بين أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا 2019

الملف موجود في: مجموعة الأستاذ ناعم محمد بلدية الأزهرية

الحل المفصل للبكالوريا التجريبية 2019 شعبة علوم تجريبية

LaTeX أستاذ المادة : ناعم

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3+45u_n}$ و منه : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{3u_n-1}{3+45u_n}$ ، و منه :

$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$.

ب) نضع : $P(n):u_n>\frac{1}{3}$.

- من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و $1>\frac{1}{3}$ و منه : $P(0)$ صحيحة .
- نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة ، حيث n عدد طبيعي.

$P(n)$ صحيحة معناه : $u_n>\frac{1}{3}$ و منه : $u_n-\frac{1}{3}>0$ و لدينا : $u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{1+15u_n}$ و منه

$u_{n+1}-\frac{1}{3}>0$ و منه : $u_{n+1}>\frac{1}{3}$ إذن $P(n+1)$ صحيحة و عليه : $u_n>\frac{1}{3}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

2/ أ) $v_n=1-\frac{1}{3u_n}$ ، $v_{n+1}=1-\frac{1}{3u_{n+1}}$ و منه $v_{n+1}=\frac{3u_n-1}{18u_n}$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18u_n}$ و منه :

$v_{n+1}=\frac{1}{6}v_n$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3u_n}\right)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، إذن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$

و حدها الأول $v_0=\frac{2}{3}$.

ب) $v_n=v_0\times q^n$ و منه : $v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

3/ $v_n=1-\frac{1}{3u_n}$ إذن $\frac{1}{u_n}=3-3v_n$ أي $\frac{1}{u_n}=3-2\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$ و منه $\boxed{u_n=\frac{1}{3-2\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}}$ من أجل

كلّ عدد طبيعي n .

- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}$.

4/ مما سبق وجدنا $\frac{1}{u_n}=3-3v_n$ و منه $S_n=(3-3v_0)+(3-3v_1)+\cdots+(3-3v_n)$ و منه

$S_n=3(n+1)-3(v_0+v_1+\cdots+v_n)$ و منه $S_n=3(n+1)-3\times v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}$ و منه

$S_n=3(n+1)-\frac{12}{5}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ أ) $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$ ، $z_1-z=\frac{z_1z_2-z_1^2}{z_1+z_2}$ و $z_2-z=\frac{z_1z_2-z_2^2}{z_1+z_2}$ و منه : $\frac{z_1-z}{z_2-z}=\frac{z_1z_2-z_1^2}{z_1z_2-z_2^2}=\frac{-z_1}{z_2}$

و منه $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1$.

ب) $\arg\left(\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z}{z_2-z}\right)+\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ أي

و منه $\arg\left(\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}\right)=(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1})+(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})$ و منه $(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1})+(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})=\pi$.

و منه النقط M, M_1, M_2, O تنتمي إلى نفس الدائرة إذن M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 .

2/ إذا كان : $z_2=\overline{z_1}$ فإنّ : $z=\frac{2z_1\times\overline{z_1}}{z_1+\overline{z_1}}$ لكن : $z_1+\overline{z_1}=2Re(z_1)$ و $z_1\times\overline{z_1}=|z_1|^2$ و منه :

$z=\frac{|z_1|^2}{Re(z_1)}$ و منه z حقيقي إذن M تنتمي إلى حامل محور الفواصل .

3/ أ) M_2 صورة M_1 بالدوران الذي مركزه O و زاويته α و منه : $z_2-0=e^{i\alpha}(z_1-0)$ أي : $z_2=e^{i\alpha}z_1$.

ب) من أ) نجد $|z_2|=|z_1|$ و منه $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1$ و منه $\left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=1$ و منه $\frac{|z_1-z|}{|z_2-z|}=1$ أي $MM_1=MM_2$ و منه M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$.

4/ أ) $z_1+z_2=\frac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1\times z_2=\frac{e^{i\theta}-1}{6}$ و منه $z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$.

ب) $z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ إذن $z=2\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})}$ و منه $z=\frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ أي $z=\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ ومنه

$z=i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

عند رمي زهر النرد مرتين فإنّ عدد الحالات الممكنة للسحب هو 36 .

1/ أ) الحالات الممكنة لتحقق الحادثة A هي $(1;3)$ و $(2;5)$ أي توجد حالتان و منه $P(A)=\frac{2}{36}$.

لإيجاد الحالات الممكنة لتحقق الحادثة B نستعين بالجدول التالي :

β \ α	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

عدد الحالات لتحقق الحادثة B حسب الجدول هو 6 و منه $P(B)=\frac{6}{36}$ أي $P(B)=\frac{1}{6}$.

2 أ) $X=\{0,1,2\}$.

ب) لتعيين قانين إحتمال X نستعين بالجدول التالي حيث نقوم بحساب قيمة المميز Δ مع $\Delta=\alpha^2-4\beta$.

β \ α	1	2	3	4	5	6
1	−3	−7	−11	−15	−19	−23
2	0	−4	−8	−12	−16	−20
3	5	1	−4	−8	−12	−16
4	12	8	4	0	−4	−8
5	21	17	13	9	5	1
6	32	28	24	20	16	12

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{17}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{17}{36}$

ج) $E(X)=0\times\frac{17}{36}+1\times\frac{2}{36}+2\times\frac{17}{36}$ و منه $E(X)=\frac{36}{36}$ أي $E(X)=1$

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

$f(x)=\dfrac{(\ln(x))^2}{x}$.

1/ أ) $f(x)=\dfrac{(\ln(\sqrt{x})^2)^2}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$ و منه : $f(x)=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ لأنّ :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$.

2/ أ) $f'(x)=\dfrac{2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}$ أي ، $f'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.
إشارة $f'(x)$:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,e^2]$ و متناقصة تماما على المجالين $]0,1]$ ، $[e^2,+\infty[$.
جدول التغيرات :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$f(e^2)$	↘	0

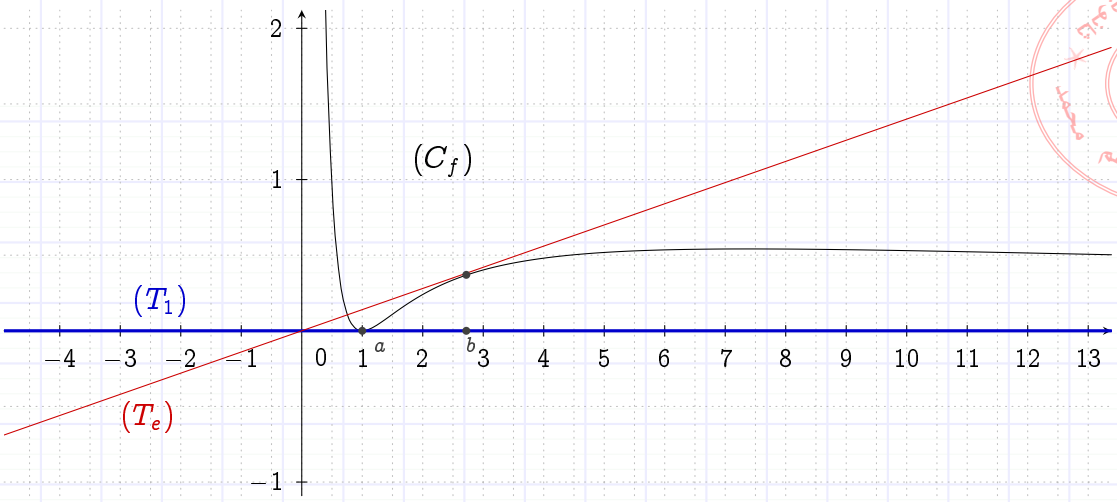
ب) $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$ إذن $f''(x)=\dfrac{(\frac{2}{x}-2\ln x\times\frac{1}{x})\times x^2-2x(2\ln x-(\ln x)^2)}{x^4}$ بعد التبسيط
نجد : $f''(x)=\dfrac{2[(\ln x)^2-3\ln x+1]}{x^3}$.
$f''(x)=0$ معناه : $(\ln x)^2-3\ln x+1=0$ ، $\Delta=9-4$ أي $\Delta=5$ و منه حلول المعادلة السابقة هي
$S=\left\{e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right\}$ إشارة $f''(x)$ كما يلي :

x	0		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$-$	

و منه (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

3/ أ) معادلة المماس (T_α) من الشكل : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ، (T_α) يشمل المبدأ معناه إحداثيات المبدأ O تحقق معادلة المماس (T_α) أي $0=f'(\alpha)(0-\alpha)+f(\alpha)$ و منه : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.
ب) $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ معناه : $\dfrac{(\ln\alpha)^2}{\alpha}-\alpha\times\dfrac{2\ln\alpha-(\ln\alpha)^2}{\alpha^2}$ و منه : $\dfrac{2\ln\alpha(\ln\alpha-1)}{\alpha}=0$ ، حلول المعادلة الأخيرة هي $\alpha=1$ أو $\alpha=e$ و منه $a=1$ و $b=e$ ، إذن يوجد مماسين (T_a) و (T_b) يمران من المبدأ O معادلتيهما على الترتيب $y=f'(1)x$ و $y=f'(e)x$ أي : $(T_1):y=0$ و $(T_e):y=\dfrac{1}{e^2}x$.

4/ الرسم :



5/ حلول المعادلة $f(x)=mx$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي معادلته $y=mx$ الذي معامل توجيهه m و يشمل المبدأ مهما تغير m (مناقشة دورانية) ، إذن من البيان نجد :

إذا كان : $m=0$ المعادلة $f(x)=mx$ تقبل حلا واحدا .

إذا كان : $m<0$ المعادلة $f(x)=mx$ لا تقبل حلولا.

إذا كان : $0<m<\dfrac{1}{e^2}$ ، المعادلة السابقة تقبل ثلاث حلول .

إذا كان : $m=\dfrac{1}{e^2}$ المعادلة السابقة تقبل حلين .

إذا كان : $m>\dfrac{1}{e^2}$ المعادلة السابقة تقبل حلا واحدا .

6/ أ) $I_1=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

نضع : $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ؛ حسب التكامل بالتجزأة فإنّ :

$\displaystyle\int_1^{e^2}u(x)\times v'(x)\mathrm{d}x=\Big[u(x)\times v(x)\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x$ حيث $v(x)=-\dfrac{1}{x}$ و $u'(x)=\dfrac{1}{x}$، إذن

$I_1=\Big[-\dfrac{\ln x}{x}\Big]_1^{e^2}+\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ أي $I_1=-\dfrac{2}{e^2}-\Big[\dfrac{1}{x}\Big]_1^{e^2}$ و منه $\boxed{I_1=1-\dfrac{3}{e^2}}$.

ب) $I_{n+1}=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln(x)^{n+1}}{x^2}\mathrm{d}x$.

نضع : $u(x)=(\ln x)^{n+1}$ و $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ إذن : $u'(x)=(n+1)\dfrac{(\ln x)^n}{x}$ ، $v(x)=-\dfrac{1}{x}$

$I_{n+1}=\Big[u(x)\times v(x)\Big]_1^{e^2}-\displaystyle\int_1^{e^2}u'(x)\times v(x)\mathrm{d}x$ ، $I_{n+1}=\Big[-\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x}\Big]_1^{e^2}+(n+1)\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$ و

منه $\boxed{I_{n+1}=\dfrac{-2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n}$.

ج) $I_2=-\dfrac{4}{e^2}+2I_1$ و منه $I_2=-\dfrac{4}{e^2}+2-\dfrac{6}{e^2}$ و منه $\boxed{I_2=2-\dfrac{10}{e^2}}$.

هندسيا I_2 مقدرة بوحدة مساحة هي مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=e$ و $y=0$.

الملف موجود في: مجموعة الأستاذ ناعم محمد بلدية الأزهرية

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ نضع : $z_0 = iy$ مع $y \in \mathbb{R}^*$ ، $P(z_0) = 0$ و منه :

$(iy)^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)(iy)^2 + (1 + i\sin 2\theta)(iy) - i\cos\theta = 0$ و منه

$(-y^3 + y - y\cos(\theta) - \cos(\theta))i + (2y^2\sin(\theta) - y\sin(2\theta)) = 0$ و منه :

$\begin{cases} -y^3 + y - y\cos(\theta) - \cos(\theta) = 0 \\ 2y^2\sin(\theta) - y\sin(2\theta) \end{cases}$ و منه $2y\sin(\theta)(y - \cos(\theta)) = 0$ بما أنّ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ إذن :

$y - \cos(\theta) = 0$ أي : $y = \cos(\theta)$ و منه $z_0 = i\cos(\theta)$.

2/ أ) $P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 + \alpha z + \beta)$ أي :

$p(z) = z^3 + (\alpha - i\cos(\theta))z^2 + (\beta - i\alpha\cos(\theta))z - i\beta\cos(\theta)$ بالمقارنة نجد :

$\begin{cases} \alpha - i\cos(\theta) = -2\sin(\theta) - i\cos(\theta) \\ \beta - i\alpha\cos(\theta) = 1 + i\sin(2\theta) \\ i\beta\cos(\theta) = i\cos(\theta) \end{cases}$.

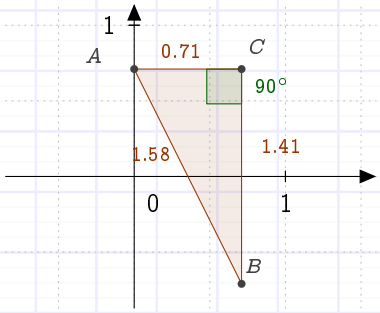
و منه $\alpha = -2\sin(\theta)$ و $\beta = 1$ ومنه $p(z) = (z - i\cos(\theta))(z^2 - 2\sin(\theta) + 1)$.

$P(z) = 0$ معناه $z - i\cos = 0$ أو $z^2 - 2\sin(\theta) + 1 = 0$ و منه $z_0 = i\cos(\theta)$ أو $z^2 - 2\sin(\theta) + 1 = 0$.

$\Delta = 4(\sin(\theta))^2 - 4$ أي $\Delta = -4(\cos(\theta))^2$ و منه $\sqrt{\Delta} = 2i\cos(\theta)$ إذن ، $z_1 = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$ و $z_2 = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$ و $z_0 = i\cos(\theta)$.

ب) $z_0 = \cos(\theta) \times e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_1 = e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$ و $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$.

3/ أ) تعليم النقط .



$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ، $AC = |z_C - z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $BC = |z_C - z_B| = \sqrt{2}$ ، لدينا

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ و منه المثلث ABC قائم في C .

ب) G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;-1)\}$ و منه $x_G = \frac{2\times 0 + 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$ و

$y_G = \frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$ و منه $G = O$ إذن O هي مرجح الجملة

$\{(A;2),(B;1),(C;-1)\}$.

4/ $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$ إذن $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = \lambda$ و منه

$2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = \lambda$ و منه $2MO^2 + 2OA^2 + OB^2 - OC^2 = \lambda$ ،

لدينا $2OA^2 + OB^2 - OC^2 = 1$ و منه $2MO^2 = \lambda - 1$ أي $MO^2 = \frac{\lambda - 1}{2}$ حيث λ عدد حقيقي .

الملف موجود في: مجموعة الأستاذ ناعم محمد بلدية الأزهرية

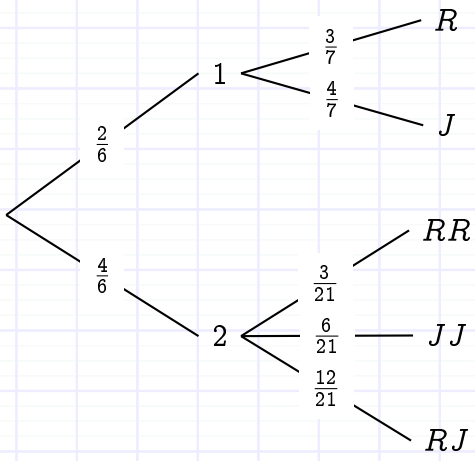
إذا كان : $\frac{\lambda-1}{2}=0$ أي $\lambda=1$ فإنّ : مجموعة النقط السابقة هي النقطة O .

إذا كان : $\frac{\lambda-1}{2}>0$ أي $\lambda>1$ فإنّ : مجموعة النقط السابقة هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=\sqrt{\frac{\lambda-1}{2}}$.

إذا كان : $\frac{\lambda-1}{2}<0$ أي $\lambda<1$ فإنّ : مجموعة النقط السابقة هي مجموعة خالية .

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ شجرة الإحتمالات :



2/ $P(A)=\frac{2}{6}$ ، $P(B)=\frac{4}{6}$.

3/ أ) $P(C)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{6}\times\frac{12}{21}$ و منه $P(C)=\frac{11}{21}$ ؛ $P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{21}$ و منه $P(D)=\frac{2}{21}$.

ب) $P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ و منه $P_C(A)=\frac{\frac{3}{21}}{\frac{11}{21}}$ و منه $P_C(A)=\frac{3}{11}$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ (P) معادلته : $x+y-z-2=0$ ، نضع : $z=\alpha$ و $y=\beta$ و منه $x+\beta-\alpha-2=0$ أي $x=\alpha-\beta+2$ ، تمثيل وسيطي لـ(P) هو $\begin{cases}x=\alpha-\beta+2\\y=\beta\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})\\z=\alpha\end{cases}$.

شعاعين ناظميين لـ (P) و (Q) هما على الترتيب $\vec{n}_1(1;1;-1)$ و $\vec{n}_2(2;1;3)$ ، $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$ و منه (P) و (Q) متعامدان .

ب) نضع: $z=t$ و منه : $\begin{cases}x+y-z-2=0\\2x+y+3z=0\\z=t\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x+y=t+2\\2x+y=-3t\\z=t\end{cases}$ و منه

تمثيل وسيطي لـ (D) مستقيم تقاطع (P) و (Q) . $\begin{cases}x=-4t-2\\y=5t+4\quad(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$

2/ $\vec{u}(2;1;-1)$ و $\vec{v}(-4,5,1)$ ، لدينا $-\frac{2}{4} \neq \frac{1}{5}$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (D) و (Δ) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

بحل الجملة $\begin{cases} -4t-2=2k \\ 5t+4=k-2 \\ t=-k \end{cases}$ نجد $t=-1$ و $k=1$ ، من أجل $t=-1$ بالتعويض في التمثيل الوسيطي لـ (D) نجد $x=2; y=-1; z=-1$ ، نفس الشئ إذا عوضنا بـ $k=1$ في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) ومنه (Δ) و (D) متقاطعان في النقطة $L(2;-1;-1)$.

3/ أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-1$.

$f'(x)=\dfrac{-6\ln x}{x(1+(\ln x)^2)^2}$ من أجل كلّ $x \in]0;+\infty[$.

و منه f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ -1	↗	2	↘	-1

ب) من أجل $\alpha \in]0;+\infty[$ لدينا $f(\alpha) \in]-1;2]$ و منه $\begin{cases} x=2f(\alpha) \\ y=f(\alpha)-2 \quad (f(\alpha) \in]-1;2]) \\ z=-f(\alpha) \end{cases}$ و منه

مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء A حيث $A(-2,-3,1)$ و $B(4;0;-2)$.

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

I) $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$.

1/ أ) $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}$ و منه $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x+1}$ أي $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}$ و منه $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

ب) من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $-x$ عنصر من $\mathbb{R}$ و لدينا $f(-x)=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{e^{-x}+1}$ أي : $f(-x)=-f(x)$

إذن f فردية .

2/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3/ أ) $f'(x)=-\frac{1}{2}+2\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}$ و منه $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب) $f'(x) \leq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x و منه f متناقصة على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

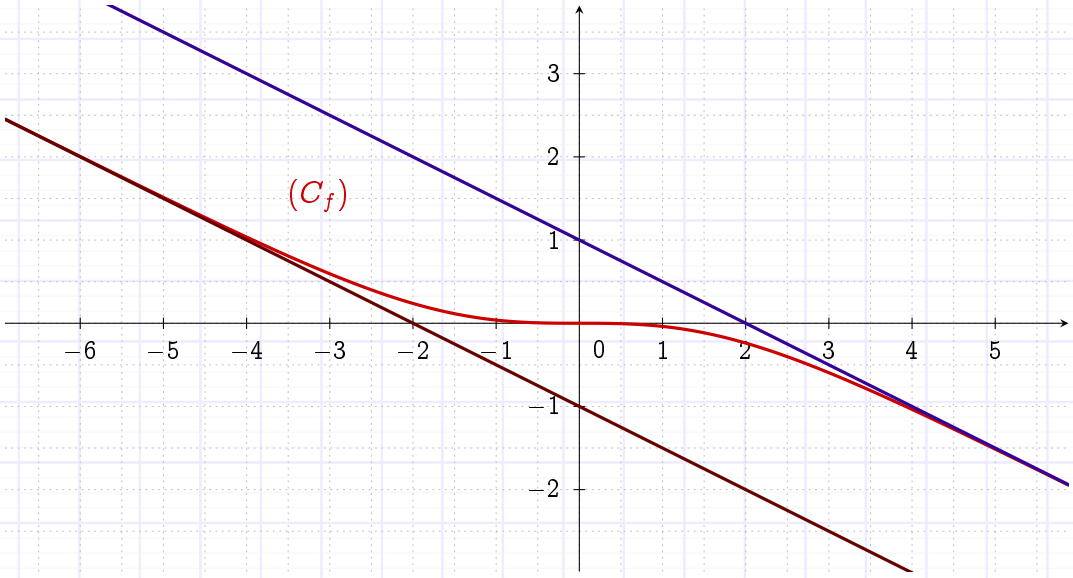
ج) $f(0)=0$ ، الدالة f متناقصة على المجال $[0,+\infty[$ و منه من أجل $x\geq 0$ ، $f(x)\leq f(0)$ أي $f(x)\leq 0$ و منه $1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\leq 0$ و منه $1-\frac{2}{e^x+1}\leq \frac{1}{2}x$ من أجل كلّ x موجب .

4/ أ) $f(x)-\left[1-\frac{1}{2}x\right]=-\frac{2}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{e^x+1}=0$ و منه $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0}$.

• (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=1-\frac{1}{2}x$ عند $+\infty$.

ب) بما أنّ f فردية فإنّ : $-y=1-\frac{1}{2}(-x)$ أي $\boxed{y=-1-\frac{1}{2}x}$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

5/ أ) الرسم :



ب) المعادلة $2f(x)=-x+|m|$ تكافئ : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{|m|}{2}$ ، و حلولها بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x+\frac{|m|}{2}$ ، هذا المستقيم يوازي المستقيمين المقاربين المائلين لـ (C_f) مهما تغير m و يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $(0,\frac{|m|}{2})$.

من البيان نجد :

إذا كان : $\frac{|m|}{2}\geq 1$ أي $|m|\geq 2$ أي $m\in]-\infty,-2]\cup[2;+\infty[$ المعادلة السابقة لا تقبل حلولا .

إذا كان : $\frac{|m|}{2}<1$ أي $|m|<2$ أي $m\in]-2,2[$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا .

II 1/ نضع : $\boxed{P(n):u_n>0}$.

• من أجل $n=0$ ، $u_0=1$ و $1>0$ و منه $P(0)$ صحيحة .

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة و نثبت صحة $P(n+1)$ ، حيث n عدد طبيعي .

الملف موجود في: مجموعة الأستاذ ناعم محمد بلدية الأزهرية

$P(n)$ صحيحة أي $u_n > 0$ و منه $e^{u_n} > e^0$ أي $e^{u_n} > 1$ و منه $e^{u_n} + 1 > 2$ و منه $\frac{1}{e^{u_n}+1} < \frac{1}{2}$ و منه $\frac{2}{e^{u_n}+1} < 1$ ومنه $-\frac{2}{e^{u_n}+1} > -1$ و منه $1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} > 0$ إذن $\boxed{u_{n+1} > 0}$ و منه $P(n+1)$ صحيحة ،
حيث n عدد طبيعي . و عليه : $\boxed{u_n > 0}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

2/ أ) حسب الجزء الأول وجدنا إذا كان $x \in]0;+\infty[$ فإنّ : $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ ، نضع : $x = u_n$ $(u_n > 0)$
و منه $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ أي $\boxed{u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) بما أنّ $u_n > 0$ و $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ إذن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ أي $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1}$ ، إذن (u_n) متناقصة .

3/ وجدنا سابقا $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

إذن

$u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}$ و

$u_{n-1} \leq \frac{1}{2}u_{n-2}$

$u_{n-2} \leq \frac{1}{2}u_{n-3}$

$\vdots$

$u_1 \leq \frac{1}{2}u_0$

بالضرب طرفا لطرف بين المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد

$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

- وجدنا $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه حسب مبرهنة الحصر نجد $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

مديرية التربية لولاية باتنة

ثانوية أجيال المستقبل الخاصة — العام الدراسي 2019/2018

السنة الثالثة : العلوم التجريبية — المدة : 3ساعت ونصف الساعة

الامتحان التجريبي (رياضيات).

على الطالب اختيار أحد الموضوعين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل :4نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس والمباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

الأعداد المركبة $z_A=\sqrt{3}+i$ ؛ $z_B=2\sqrt{3}-2i$ و $z_C=-2i$ هي على الترتيب لواحق النقط A ؛ B و C .

1) – أ) أكتب على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلّثي العدد المركب $\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$.

- ب) فسر هندسيا الطويلة وعمدة للعدد المركب $\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) النقطة D هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

- أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

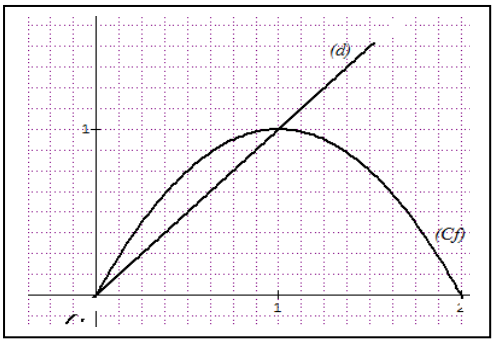
- ب) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z_B ثم العدد المركب z_D .

- جـ) استنتج قسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB})$.

- د) ماذا يمكنك أن تقول عن النقط O ؛ B ؛ D ؟

3) عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة لمجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-\sqrt{3}-i\right|=OC$.

التمرين الثاني :5 نقط



الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. واحدة الأطوال هي $4cm$.

(d) هو المستقيم الذي معادلته $y=x$.

نعرف في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بحدها الأوّل $u_0=\dfrac{1}{8}$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$

1) أنقل على ورقة الإجابة الشكل ثم على حامل محور الفواصل مثل الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 و u_3 موضحا خطوط الرسم

2) ما هو تخمينك حول رتابة وتقارب المتتالية (u_n) ؟

3) – أ) بالتراجع ؛ برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

- ب) بين أنّ (u_n) متتالية متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

4) نعرف في $\mathbb{N}$ المتتاليتين (v_n) و (w_n) كما يلي : $v_n=1-u_n$ و $w_n=\ln(v_n)$.

برهن أنّ $v_{n+1}=v_n^2$ وأنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$.

التمرين الثّالث :3نقط

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نأخذ النقط :

$A(1;2;3)$ ؛ $B(0;1;4)$ ؛ $C(-1;-3;2)$ ؛ $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1) برهن أن النقط A ؛ B ؛ C تحدد مستويا.

2) – أ) تحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وأنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$.

- ب) استنتج أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

- جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) (Δ) هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الرابع :8 نقط

I) g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-x-1-\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أحسب $g'(x)$ ثمّ تحقّق أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة g .

4) – أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

- ب) استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$.

II) نعرّف في المجال $]0;+\infty[$ الدّالة f كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+x$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايتي الدالة f .

2) – أ) تحقق أنّه من أجل كل x مكن المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x}$.

- ب) شكّل بعد ذلك جدول تغيرات الدالة f .

3) أدرس وضع (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

4) أنشئ (Δ) و (C_f) .

5) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{2}x(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2$

- أ) بين أن h هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

- ب) عين الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1)=2$.

- جـ) أحسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ؛ $x=2$ و $y=x$.

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل:4 نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$.

II) النقط A ، B ، C هي على الترتيب صور الأعداد المركبة $z_A=1+i$ ؛ $z_B=1-i$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

1) النقطة E هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة B .

بين أنّ $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$.

2) R هو الدوران الذي مركزه النقطة O و $\frac{\pi}{2}$ قيسا لزاويته.

نضع $R(C)=F$ و $R(E)=G$.

- أ) جد العبارة المركبة للدوران R ثمّ :

- ب) تحقّق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ وأنّ $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$.

3) h هو التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

ليكن S التحويل المركب من التّحويلين R و h .

عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة للتحويل S .

التمرين الثاني : 4 نقط

لدينا ثلاثة صناديق متماثلة : U_1 ؛ U_2 و U_3 .

كل صندوق يحوي 6 كرات من اللونين : أبيض (B) وأحمر (R)

الصندوق U_1 فيه 2 كرتين بيضاوين و4 كرات حمراء.

الصندوق U_2 فيه 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.

الصندوق U_3 فيه 5 كرات بيضاء و1 كرة حمراء.

نختار عشوائيا احد الصناديق ثمّ نسحب منه كرة واحدة.

1) مثّل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

2) احسب احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U_3 .

3) أحسب احتمال سحب كرة بيضاء

4) علما أنّ الكرة المسحوبة بيضاء ، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_3 ؟

التمرين الثالث :4نقط

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = e^{3n+2}$

حيث يشير e إلي أساس اللوغاريتم النيبيري.

1) - أ)بين أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .

هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علّل.

- ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

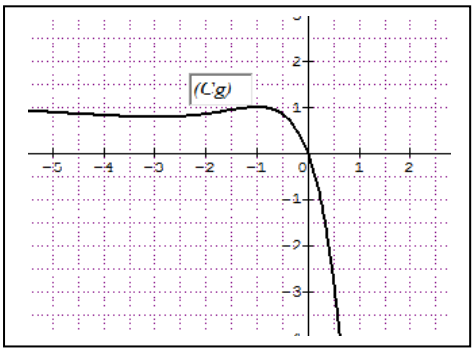
- أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة v_n بدلالة n .

- ب) أحسب بدلالة n :

- المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ ثمّ
- الجداء : $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$

التمرين الرابع :8 نقط

I)الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_g) للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$.



1) تحقق أنّ $g(0) = 0$.

2) اعتمادا على (C_g) برر ما يلي :

- أ) من اجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x) \succ 0$.

- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \prec 0$.

II) نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الدالة f بما يلي : $f(x) = (x+1) - (x^2+1)e^x$.

(C_f) هو التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب غلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) – أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

- ب) تحقق أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$.

- جـ) استنتج ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار$(-\infty)$.

- د) تحقّق أن (C_f) يقع أسفل (Δ) .

3) تحقّق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) – أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

- ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ (Δ) ثم (C_f) في المعلم السابق. (نأخذ $f(-1) \simeq -0,75$ و $f(-3) \simeq -2,5$)

6) – أ) تحقق أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة h حيث: $h(x) = xe^x$.

- ب) بين أنّ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.

- جـ) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أنّ $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

الحل المفصّل للموضوع الأوّل

تمرين 1 :

1) – أ)نكتب على الشكلين الجبري والمثلثي العدد1

المركب $\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)$.

لدينا $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-2i - 2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} + i - 2\sqrt{3} + 2i}$

$= \frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 3i}$

$= \frac{-2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3} - 3i\right)}{12}$.

$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- ب) التفسير الهندسي للطويلة وعمدة للعدد 0,5

المركب $\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)$.

لدينا ما يلي :

$$\begin{cases} \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{BC}{BA} \\ Arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

من خلال ما سبق :

$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$= \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$

وبالتّالي :

وعليه: $\begin{cases} BC = BA \\ \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2 -) أ) تعيين z_D . 0,5

النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب وهذا معناه

$\mathrm{Re}(z_D) = -\mathrm{Re}(z_A)$ و $\mathrm{Im}(z_D) = \mathrm{Im}(z_A)$.

وبالتالي : $z_D = -\sqrt{3} + i$.

- ب) كتابة z_B **و** z_A **على الشكل الأسي.** 0,5

$z_B = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

إذا : $z_B = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ثمّ :

$z_D = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

وعليه : $= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

- جـ) استنتاج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)$ 0,5

$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv Arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)[2\pi]$

$\equiv \left[Arg(z_D) - Arg(z_B)\right][2\pi]$

$\equiv \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

إذا : $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right) = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

- د) موضع النقط O ؛ D ؛ B 0,5

النقط O ؛ D ؛ B في استقامية .

3 -) الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة 0,5

لمجموعة النقط M ـ

$\left|z - \left(\sqrt{3} + i\right)\right| = OC$ معناه $\left|z - \sqrt{3} - i\right| = OC$

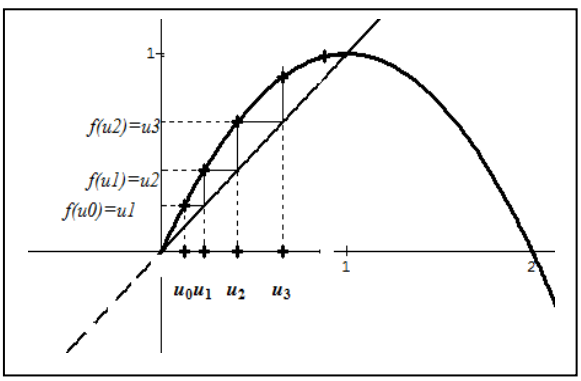
$\left|z_M - z_A\right| = OC$ معناه

$MA = OC$ معناه

المجموعة هي إذا الدائرة ذات المركز A ونصف القطر المسافة OC .

تمرين 2 :

1) تمثيل الحدود 1



2) التخمين حول رتابة وتقارب (u_n) 0,5

من خلال التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتالية (u_n) نلاحظ ما يلي :

*) $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$.

إذا كانت (u_n) رتيبة فهي حتما متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

*) النقط $M_n(u_n; f(u_n))$ من (C_f) تقترب من نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) وبالتالي (u_n) متتالية متقاربة .

3) – أ) بالتراجع نبين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$

نضع : $P(n): 0 \prec u_n \prec 1 \; ; n \in \mathbb{N}$

*) نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = \frac{1}{8}$ إذا : $0 \prec u_0 \prec 1$.

$P(0)$ صحيحة.

**)نفرض أنّه عند الرتبة n ؛ $P(n)$ صحيحة أي نفرض أنّ : $0 \prec u_0 \prec 1$ ونبين صحة $P(n+1)$

أي نبين ما يلي : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

لدينا وحسب فرضية التراجع $0 \prec u_n \prec 1$

إذا : $(2-u_n) \succ 0$ وبالتالي : $u_n(2-u_n) \succ 0$ ..(1)

ثمّ $u_{n+1} - 1 = u_n(2-u_n) - 1$

$= -u_n^2 + 2u_n - 1$

$= -(u_n - 1)^2$

أي $u_{n+1} - 1 \prec 0$. إذا $u_{n+1} \prec 1$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

إذا : $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع يكون :

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

-ب) نبين أن (u_n) متتالية متزايدة ثم 0,5

نستنتج انّها متقاربة

*) لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n$

$= u_n(2-u_n-1)$

$= u_n(1-u_n)$

حسب ما سبق : $u_n(1-u_n) \succ 0$ إذا $\begin{cases} u_n \succ 0 \\ (1-u_n) \succ 0 \end{cases}$

أي : $u_{n+1} - u_n \succ 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

**) (u_n) متتالية متزايدة تماما

(u_n) محدودة من العلى بالعدد 1 .

إذا وحسب مبرهنة التقارب الرتيب : (u_n) متقاربة.

4) نبرهن ما يلي :

-) $v_{n+1} = v_n^2$ 0,5

لدينا : $v_{n+1} = 1 - u_{n+1}$

$= 1 - u_n(2-u_n)$

$= 1 - 2u_n + u_n^2$

$= (1-u_n)^2$

أي : $v_{n+1} = v_n^2$.

-) (w_n) **متتالية هندسية اساسها** $q = 2$. 0,5

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$= \ln(v_n^2)$

$= 2\ln(v_n)$

أي : $w_{n+1} = 2w_n$

إذا (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

تمرين 3 :

1) نبرهن أنّ النقط A ، B ، C تحدد مستويا

لدينا :

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$

نلاحظ ما يلي : $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ أي

لا يوجد عدد حقيقي k يحقق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{AC}$ وهذا معناه أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية فهي تعرف إذا المستوي (ABC) .

2) – ا) نتحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

حسب العبارة التحليلية للجداء السلمي : 0,5

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(-1) + (-1)(-1) + 1(1)$

$= 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2(-2) + (-1)(-5) + 1(-1)$

$= 0$

ومنه : $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

- ب) نستنتج أنّ $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) . 0,5

بما أنّ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

- جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

المستوي (ABC) معرّف بالشعاع الناظم $\vec{n}(2;-1;1)$ وبالنقطة $A(1;2;3)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC)

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0$

معناه $2x-y+z-3=0$.

$(ABC): 2x-y+z-3=0$.

3) نتحقق أنّ D نقطة من (Δ) . 0,5

نحل في $\mathbb{R}$ الجملة : (I) ... $\begin{cases} 4=2-2t \\ -2=-1+t \\ 5=4-t \end{cases}$

(I) تكافئ $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$

الجملة تقبل حلا وحيدا وهذا معناه : $D\in(\Delta)$.

تمرين 4 :

1) 1) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ **ثم** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

(* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; $\begin{cases} (-x-1)\to -1 \\ \ln x\to -\infty \end{cases}$

(* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$; $\begin{cases} (-x-1)\to -\infty \\ \ln x\to +\infty \end{cases}$

2) *) حساب $g'(x)$ 0,5

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-1-\frac{1}{x}$

$=-\left(1+\frac{1}{x}\right)$

***) نتحقق أن** $g'(x)\prec 0$

من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\succ 0$ وعليه :

$-\left(1+\frac{1}{x}\right)\prec 0$

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

3) إنشاء جدول تغيرات الدالة g . 0,5

g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	0 ↘	$-\infty$

4) – أ) * نبين أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في المجال** $]0;+\infty[$. 0,5

من خلال جدول التغيرات نلاحظ ما يلي :

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;+\infty[$ و $]-\infty;+\infty[$ $0\in$

وعليه : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

***)نتحقق أنّ** $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

لدينا :

$g(0,2)\simeq 0,409$ ؛ $g(\alpha)=0$ و $g(0,3)\simeq -0,096$

نلاحظ ما يلي : $g(0,3)\prec g(\alpha)\prec g(0,2)$

بما أن g دالة متناقصة فهي لا تحفظ الترتيب .

وعليه : $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

- ب) استنتاج إشارة $g(x)$ **في المجال** $]0;+\infty[$ 0,5

حسب جدول التغيرات وبما أنّ $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

0	α	$+\infty$
‖	0	
$+$		$-$

II) 1) حساب نهايتي الدّالة f . 1

(* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=?$ $\begin{cases} \ln^2 x\to+\infty \\ \ln x\to-\infty \end{cases}$

حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

نزيل هذه الحالة .

$f(x)=\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)+x$.

بالإنتقال إلى النهاية نجد :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)+x\right]$

$=+\infty$; $(\ln x\to-\infty)$

(*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) – أ) نتحقق أن $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x}$. 0,5

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2.\frac{1}{x}\ln x\right]+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{x+1+\ln x}{x}$$

أي : $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x}$ $=\dfrac{-(-x-1-\ln x)}{x}$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f . 0,5

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3) دراسة وضع (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ) 1

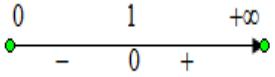
ندرس في المجال $]0;+\infty[$ إشارة الفرق $f(x)-x$

$f(x)-x=\ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)$.

إشارة هذا الفرق هي إذا من إشارة الجداء

$\ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)$.

(*) إشارة $\ln x$ كما يلي :



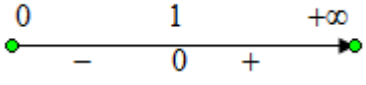
(*) لتحديد إشارة $\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)$ نحل في المجال

$]0;+\infty[$ المتراجحة : $\dfrac{1}{2}\ln x+1\geq 0$

$\dfrac{1}{2}\ln x+1\geq 0$ معناه $\ln x\geq -2$

معناه $x\geq e^{-2}$

إشارة $\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)$:



إشارة الفرق $[f(x)-x]$ في الجدول :

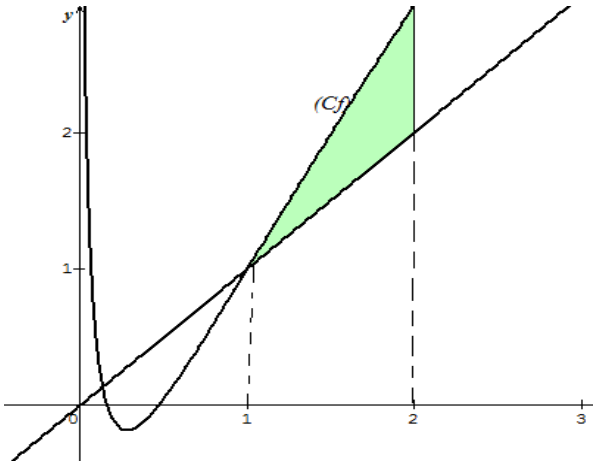
0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{2}\ln x+1$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)-x$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(*) (C_f) أعلى (Δ) على المجالين $]0;e^{-2}[$ و $]1;+\infty[$

(*) (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^{-2}

(*) (C_f) أسفل (Δ) في المجال $]e^{-2};1[$.

4) إنشاء (Δ) **و** (C_f) 0,5



5) – ا)نبين أن h **دالة أصلية للدالة** f . 0,5

h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2+x.\frac{2}{x}\ln x\right]+x$$

$h'(x)=f(x)$ أي $=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+x$

h هي إذا دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

-ب) نعين الدالة الأصلية F **حيث** $F(1)=2$. 0,5

F تحقق : $F(x)=h(x)+c/c\in\mathbb{R}$ و $F(1)=2$.

$F(1)=2$ معناه $h(1)+c=2$

معناه $\dfrac{1}{2}+c=2$ ؛ نجد : $c=\dfrac{3}{2}$.

إذا : $F(x)=\dfrac{1}{2}x(\ln x)^2+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$.

- جـ) حساب المساحة S **للحيز.** 0,5

(C_f) أعلى (Δ) في المجال $[1;2]$ وبالتالي :

أي $S=\int_1^2[f(x)-x]dx.ua$

$S=\int_1^2 f(x)dx.ua-\int_1^2 xdx.ua$

نجد : $S\simeq 0,480ua$ $=\left[\dfrac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_1^2 ua$

الحل المفصل للموضوع الثاني

تمرين 1 :

I) نحل المعادلة : 1,5

$$\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$$

معناه

$$\begin{cases} z+i\sqrt{3}=0 \;;\; z=-i\sqrt{3} \\ z^2-2z+2=0 \quad ...(1) \end{cases}$$

المميز Δ للمعادلة (1) هو:

$$\Delta=-4\prec 0$$

للمعادلة (1) حلان مترافقان هما z_1 و z_2 حيث :

$$z_1=\frac{2+2i}{2}$$ اي $$z_1=1+i$$ و $$z_2=\overline{z_1}=1-i$$

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة فإنّ :

$$S=\left\{-i\sqrt{3},1+i,1-i\right\}$$

II -1) نبين أنّ $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ 0,5

E نظيرة C بالنسبة إلى B معناه B منتصف $[CE]$

$$z_B=\frac{z_C+z_E}{2}$$ معناه

$$z_E=2z_B-z_C$$ معناه

بالتعويض :

$$z_E=2(1-i)-(-i\sqrt{3})$$

$$=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$$

2) – أ) إيجاد العبارة المركبة للدوران R 0,5

عبارة R من الشكل $z'=az+b$

بما أن المركز هو O وقيس الزاوية هو $\frac{\pi}{2}$ ينتج :

$$b=0$$ و $$a=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=i$$

إذا : $R: z'=iz$

- ب) نتحقق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ **وأن** $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$ 1

(* $R(C)=F$ معناه $z_F=iz_C$

$z_F=\sqrt{3}$ أي $z_F=i\left(-i\sqrt{3}\right)$

(* $R(E)=G$ معناه $z_G=iz_E$

$$=i\left[2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right]$$

$$z_G=2i-\left(\sqrt{3}-2\right)$$

$$=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$$

3) تعيين طبيعة التحويل S 0,5

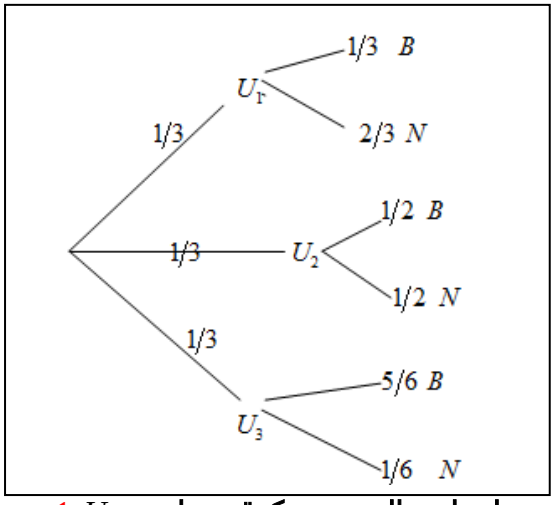
S هو مركب تحاكي موجب ودوران لهما نفس المركز.

إذا : S هو التشابه الذي مركزه النقطة O ؛ نسبته 2

وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

تمرين 2 :

1) تمثيل التجربة بشجرة الاحتمالات 1



2) حساب احتمال سحب كرة بيضاء من U_3 1

$$P(B\cap U_3)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{5}{18}$$

3) حساب احتمال سحب كرة بيضاء 1

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

4) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ؛ نحسب احتمال أن تكون من الصندوق U_3 1.

$$P_B(U_3)=\frac{P(B\cap U_3)}{P(B)}$$

$$P_B(U_3)=\frac{1}{2}$$ أي $$=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}$$

تمرين 3

1) – أ)نبين أنّ (u_n) **متتالية هندسية** 1

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}=e^{3n+3+2}$$
$$u_{n+1}=e^{3}\times e^{3n+2}$$
$$=e^{3}\times u_n$$

وعلية المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسه $q=e^3$ وحدها الأول $u_0=e^2$

(* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3n+2}\right)$

$=+\infty$; $(3n+2\to+\infty)$

المتتالية (u_n) لست متقاربة. 0,5

- ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) 0,5

بما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\succ 0$ ح نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^3\succ 1$.

إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$

2) – ا)* نبين أن (v_n) **متتالية حسابية** 0,5

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}-v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$$
$$=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

وحسب ما سبق: $v_{n+1}-v_n=\ln(e^3)$

$=3$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية حسابية أساسها $r=3$

وحدها الأوّل $v_0=\ln(u_0)$

$=2$ ($u_0=e^2$)

***) كتابة** v_n **بدلالة** n 0,5

عبارة الحد العم للمتتالية الحسابية (v_n) معطاة

بالعلاقة : $v_n=v_0+n.r$

بالتعويض نجد : $v_n=3n+2$

- ب) نحسب بدلالة n

- المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ 0,5

S_n هو مجموع n جدا الأولى من المتتالية الحسابية (v_n)

ومنه : $S=\frac{n}{2}(v_0+v_{n-1})$

$=\frac{n}{2}(2+3n-1)$

$$S_n=\frac{n(3n+1)}{2}$$

- **الجداء:** $T_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}$ 0,5

من العلاقة $v_n=\ln(u_n)$ ينتج $u_n=e^{v_n}$.

في هذه الحالة :

$$T_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times...\times e^{v_{n-1}}$$
$$=e^{v_0+v_1+...+v_{n-1}}$$
$$=e^{S_n}$$

بتعويض S_n بقيمته ينتج : $T_n=e^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

تمرين 4 :

(I

1) نتحقق أن $g(0)=0$ 0,5

لدينا : $g(0)=1-(0+1)^2e^0$

$=1-1$

$=0$

2) اعتمادا على (C_g) **نبرر ما يلي :** 1

- أ) من أجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x)\succ 0$

(C_g) أعلى حامل محور الفواصل في المجال $]-\infty,0[$

إذا g دالة موجبة تماما على هذا المجال .

- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$.

بيانيا (C_g) يقع أسفل حامل محور الفواصل عل هذا المجال أي g دالة سالبة تماما .

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$

(II

1) – أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 0,5

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=?\begin{cases}(x^2+1)\to 0\\ e^x\to 0\end{cases}$$

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

نزيل هذه الحالة :

$$f(x)=(x+1)-x^2e^x-e^x$$

بالانتقال إلى النهاية نجد :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)-x^2e^x-e^x\right]$$
$$=-\infty\ ;\begin{cases}(x+1)\to-\infty\\ x^2e^x\to 0;e^x\to 0\end{cases}$$

- ب) نتحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ 0,5

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-(x^2+1)e^x\right]$$
$$=0$$

-جـ) استنتاج أن (Δ) مستقيم مقارب 0,5

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.

- د) نتحقق أن (C_f) أسفل (Δ) 0,5

وضع (C_f) بالنسبة إلى (Δ) تحدد إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+1)\right]$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left[f(x)-(x+1)\right]=-(x^2+1)e^x$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}-(x^2+1)\prec 0\\ e^x\succ 0\end{cases}$$ وبالتالي $\left[f(x)-(x+1)\prec 0\right]$

(C_f) يقع إذا أسفل مستقيمة المقارب (Δ) .

3) *) نتحقق أن $f(x)=x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ 0,5

من اجل $x\neq 0$

$$x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=\left[x+\frac{x}{x}-x\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=\left[x+1-(x^2+1)e^x\right]$$
$$=f(x)$$

***) استنتاج** $\lim_{x\to-\infty}+f(x)$ 0,5

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=-\infty\ ;\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x}\right)\to 1\\ \left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\to+\infty\end{cases}$$

4) نبين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ 0,5

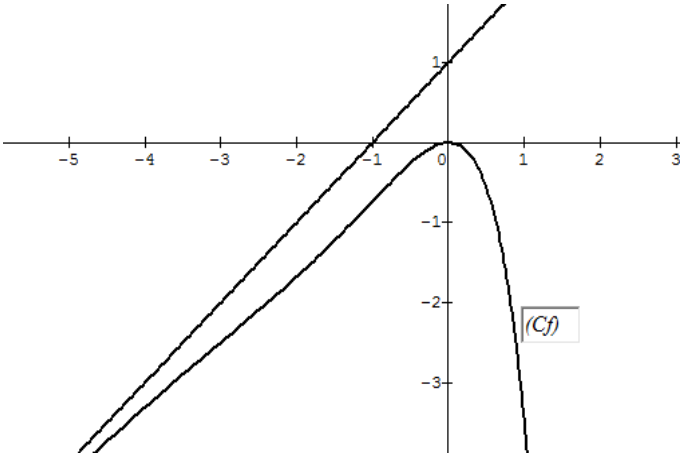
$$f'(x)=1-\left[2xe^x+(x^2+1)e^x\right]$$
$$=1-\left[(2x+x^2+1)e^x\right]$$
$$=1-(x+1)^2e^x$$
$$=g(x)$$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f 0,5

أشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

5) إنشاء (Δ) **ثم** (C_f) 0,5



6) نتحقق أنّ H دالة أصلية للدالة h 0,5

H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$H'(x)=e^x+(x-1)e^x$$
$$=xe^x$$
$$=h(x)$$

إذا H هي إحدى الدوال الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

- ب) نبين أنّ $\int_{-1}^{0}xe^x dx=\frac{2}{e}-1$ 0,5

$$\int_{-1}^{0}xe^x dx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$

$\int_{-1}^{0}xe^x dx=\frac{2}{e}-1$ أي $=-1-(-2)e^{-1}$.

-جـ) بالتجزئة نبين أنّ $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ 1

نضع $\begin{cases}u(x)=x^2+1\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ نجد $\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^x\end{cases}$

حسب مفهوم المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx=\left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xe^x dx$$
$$=\left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\left[2(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left[(x^2-2x+3)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=3-6e^{-1}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — **ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية بسكرة**

الشعبـــة : العلـوم التجريبيـــــــــة — **دورة مـــــــــــــــــاي 2019**

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 3 ساعات ونصف**

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I) نعرف في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P كثير حدود للمتغير المركب z بـ : $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

1) تحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

2) عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة C الى النقطة B مع ذكر عناصره المميزة

3) استنتج نوع المثلث ABC

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z^2|-(z+\bar{z})-2=0$

أ) تحقق ان النقطة B من المجموعة (E)

ب) عين ثم انشئ المجموعة (E) في المعلم $(O,\vec{u};\vec{v})$

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<u_n<2$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) بين مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) من اجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

أ) أكتب $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

يحتوي وعاء على ثلاث قريصات بيضاء مرقمة بالشكل **1** ، **5** ، **5** واربع قريصات حمراء مرقمة بالشكل **1** ، **1** ، **3** ، **3** .
القريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:
A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون"
B : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 6"

2) احسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A ، B مستقلين ؟.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع الرقميين المسجلين عليهما.
أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟.
ب) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X
ج) احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-4;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ)اثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D).

3) أ) بين انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثييها.

د) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1.6 < \alpha < -1.7$

4) أنشئ (C_f) و (D) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$.

II 1) اوجد مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على $[-4;+\infty[$.

2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 0$

احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للسطح المستوي المحدد بـ (C_f) و (D)

و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ $x=\lambda$

3) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 3z - 9$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{u}\,; \vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ على الترتيب .

1) احسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ثم استنتج ان النقطتين A ، B تنتميان الى دائرة (C) يطلب تحديد عناصرها المميزة.

2) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

أ) حدد طبيعة التحويل النقطي T ، مع ذكر عناصره المميزة

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل النقطي T.

3) أ) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول النقطة C الى النقطة B ، مع ذكر عناصره المميزة.

التمرين الثاني :

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2

2) بين أن المتتالية العددية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n^2 + 3$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ، ثم احسب حدها الاول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) أكتب بدلالة n المجموعين S ، S' حيث:

$$S = v_0 + v_1 + ... + v_n$$
$$S' = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ ، $E(7;-1;4)$

1) بين أن النقط A ، B و C تشكل مستو.

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة E و $\vec{u}(2;-1;3)$ شعاع توجيه له.

أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) ليكن (P) و (P') مستويين معرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P): x+y+z=0$$

$$(P'): x+4y+2=0$$

أ) بين أن (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') المعرف بتمثيله الوسيطي :

$$(D'): \begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D') و المستوي (ABC).

التمرين الرابع :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ ، $\|\vec{i}\|=1cm$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=e^{-x}g(e^x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أنشئ (C_f) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

4) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية لدالة f على $\mathbb{R}$

ب) A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\ln 2$ ،احسب بـ cm^2 المساحة A

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات المستوى: الثالثة ثانوي

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الاول	العلامة مجزاة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة	**التمرين الاول:**		05

(I

أ) التحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ فان $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$:

$(z-2)(z^2-2z+4)=z^3-4z^2+8z-8=P(z)$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ ، للمعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ معناه: $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ ومنه $z=2$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1+i\sqrt{3}$ أي $S=\left\{z=2\,;z=1-i\sqrt{3};z=1+i\sqrt{3}\right\}$

(II

1) كتابة الشكل الاسي للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) تعيين طبيعة التحويل النقطي f :

لدينا : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_B-z_A=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)$

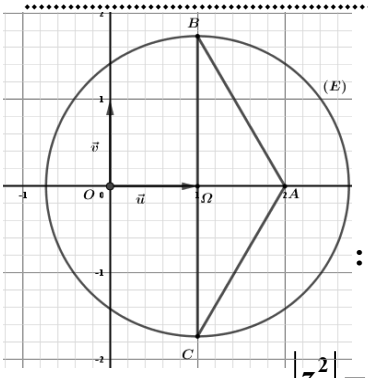
ومنه : التحويل النقطي f هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}$

3) استنتاج نوع المثلث ABC :

لدينا $\left|z_B-z_A\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right|\left|z_C-z_A\right|=\left|z_C-z_A\right|$ ومنه $AB=AC$

اذن: المثلث ABC متساوي الساقين .

4) .....



أ) التحقق من ان النقطة B من المجموعة (E) :

$\left|z_B{}^2\right|-\left(z_B+\overline{z_B}\right)-2=4-2-2=0$

إذن: النقطة B من المجموعة (E) .

ب) تعيين و انشاء المجموعة (E) في المعلم $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$:

لتكن النقطة M من المستوي المركب لاحقتها $z=x+iy$

لدينا M من المجموعة (E) معناه ان : $\left|z^2\right|-\left(z-\overline{z}\right)-2=0$

ومنه $x^2+y^2-2x-2=0$ أي $(x-1)^2+y^2=3$ وبالتالي مجموعة النقط (E) هي عبارة عن الدائرة التي مركزها النقطة $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}\,u.m$

التمرين الثاني:

1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n < 2$:

- من اجل $n = 1$ لدينا $u_1 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 < u_1 < 2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 1$
- نفرض ان $0 < u_n < 2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n ونبرهن ان $0 < u_{n+1} < 2$ محققةكذلك

لنا $0 < u_n < 2$ ومنه $3 < u_n + 3 < 5$ ومنه $\frac{1}{3} < \frac{1}{u_n + 3} < \frac{1}{5}$ ومنه $-1 < -\frac{5}{u_n + 3} < -\frac{5}{3}$

ومنه $3 - \frac{5}{3} < 3 - \frac{5}{u_n + 3} < 3 - 1$ ومنه $2 < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < \frac{4}{3}$ أي $0 < \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} < 2$

أي $0 < u_{n+1} < 2$ ومنه الخاصية $0 < u_{n+1} < 2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n.

- نستنتج مما سبق ان الخاصية $0 < u_n < 2$ محققة اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3} > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) تبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة:

بما ان (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي اذن متقاربة

4) أ) كتابة $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) :

لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{5u_n - 10}{5u_n + 10} = \frac{15u_{n+1} + 20}{u_{n+1} + 3} = 5v_{n+1}$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الاول

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{-1 - 2}{-1 + 2} = -3$$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n : $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\left(\frac{1}{5}\right)^n$ بالتعويض نجد

$u_n = \frac{-2v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.

ج) استنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2(5^n) - 6}{5^n + 3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2(5^n)}{5^n + 3} = 2$.

التمرين الثالث :

1) حساب احتمال الحدثين A ، B :

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3}{7} \quad ، \quad P(B)=\frac{C_2^1\times C_3^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{3}$$

2) حساب احتمال $P(A\cap B)$ ، و هل الحدثين A ، B مستقلين:

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_1^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

لدينا: $P(A)\times P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

اذن : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ أي الحدثين A ، B مستقلين

3) أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X\in\{2\,;4\,;6;8;10\}$$

ب) اعطاء قانون احتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}$$

$$P(X=6)=\frac{7}{21}$$

$$P(X=8)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

$$P(X=10)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

x_i	2	4	6	8	10
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

ب) حساب $E(X)$ ، $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_iP(X=x_i)=(2)\left(\frac{3}{21}\right)+(4)\left(\frac{6}{21}\right)+(6)\left(\frac{7}{21}\right)+(8)\left(\frac{4}{21}\right)+(10)\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{38}{7}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2P(X=x_i)-(E(X))^2$$

$$=(2)^2\left(\frac{3}{21}\right)+(4)^2\left(\frac{6}{21}\right)+(6)^2\left(\frac{7}{21}\right)+(8)^2\left(\frac{4}{21}\right)+(10)^2\left(\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{38}{7}\right)^2$$

$$=\frac{680}{147}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{680}{147}}\approx 2.15$$

04

الدوال العددية

التمرين الرابع:

(I

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) إثبات أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$.

إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) : لدينا : $d(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{8}{e^x+2}$

بما انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$: $0<\dfrac{8}{e^x+2}$ أي : $0<d(x)$

أي ان (C_f) يقع فوق المستقيم (D).

3) أ) حساب $f'(x)$: $f'(x)=1-\dfrac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها :

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ $\left(e^x+2\right)^2>0$ و $\left(e^x-2\right)^2\geq 0$ ومنه $f'(x)\geq 0$

و لدينا $f'(x)=0$ يكافئ ان $\left(e^x-2\right)^2=0$ يكافئ ان $e^x-2=0$ يكافئ ان $x=\ln 2$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-4		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-2-\dfrac{4}{2e^4+1}$	↗		↗	$+\infty$

ج) استنتاج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف مع تحديد احداثييها:

بما ان $f'(x)$ تنعدم من اجل القيمة $\ln 2$ ولا تغير اشارتها عند القيمة $\ln 2$ فان النقطة $\Omega(\ln 2;\ln 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

د) تبيين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$-1.7<\alpha<-1.6$

لدينا دالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[-4;+\infty[$ و $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ إذن

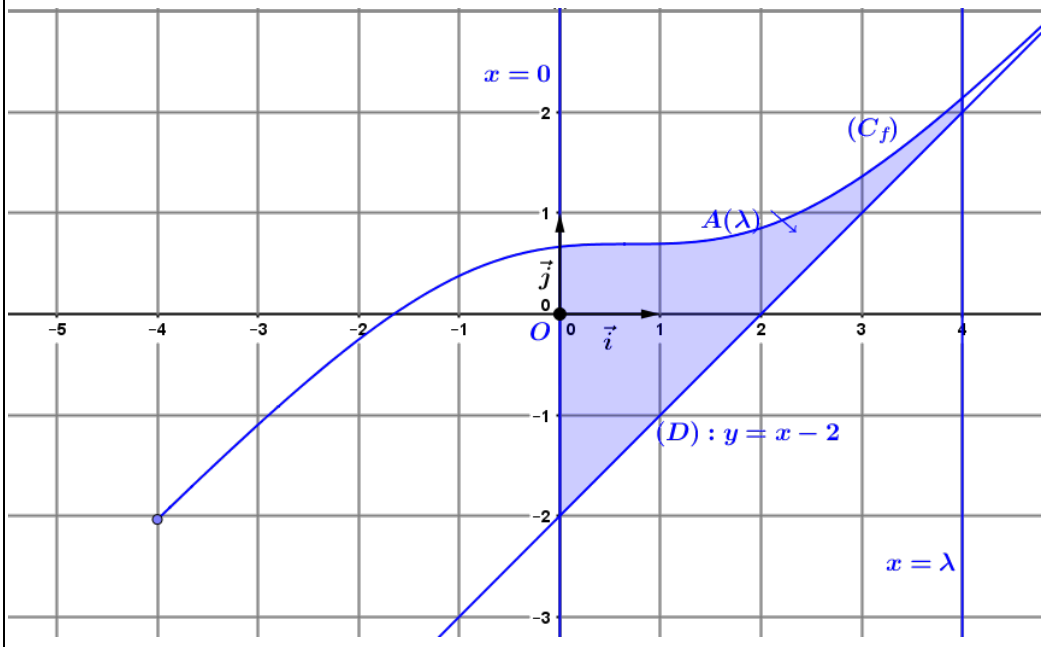
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث :

$-1.7<\alpha<-1.6$

أي ان المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

07

4) إنشاء (C_f) و (D) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$:



الدوال العددية و الحساب التكاملي

07

II) 1) ايجاد الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال $]-4;+\infty[$:

الدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ معرفة ومستمرة على المجال $]-4;+\infty[$ فهي تقبل دوال اصلية .

نضع $u(x)=e^x+2$ ومنه $u'(x)=e^x$ ومنه نجد ان الدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ مكتوبة على الشكل $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ اي ان مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال $]-4;+\infty[$ هي: $x \mapsto \ln\left(e^x+2\right)+k \quad ; k \in \mathbb{R}$.

2) حساب المساحة $A(\lambda)$:

$$A(\lambda)=2\times 2\left[\int_0^{\lambda}\left(\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)-(x-2)\right)dx\right]=8\left[\int_0^{\lambda}\left(4-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)dx\right]$$

$$=8\left[4x-4\ln(e^x+2)\right]_0^{\lambda}=8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)cm^2$$

3) حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} 8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)=+\infty$$

الأعداد المركبة

04

تصحيح الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

I) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = 3z - 9$:

المعادلة $z^2 = 3z - 9$ تكافيء $z^2 - 3z + 9 = 0$ ومنه $\Delta = (-3)^2 - 4\times(1)(9) = -27$

ومنه نجد $S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$.

II) 1) حساب $|z_A|, |z_B|$:

$$|z_A| = \left|3e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 3 \quad ، \quad |z_B| = \left|\overline{z_A}\right| = 3 .$$

لدينا $|z_A| = OA = 3$ وأيضا $|z_B| = OB = 3$ اذن نستنتج أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة ذات المركز O ونصف القطر R=3.

2) أ) تحديد طبيعة التحويل T:

لنا العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ وهي من الشكل $z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$

وحسب الدرس يتضح ان هذه العبارة هي لدوران مركزه النقطة O وزاويته $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

ب) تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتحويل T:

C صورة A بالتحويل T معناه $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \left(3e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

3) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي:

لنا $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)}{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول C الى B مع ذكر عناصره المميزة:

لنا $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $z_B - z_A = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A)$ وهو من الشكل

$z' - z_\Omega = re^{i\theta}(z - z_\Omega)$ أي ان التقطة B هي صورة C بتشابه مباشر وعليه نستنتج ان S هو التشابه المباشر الذي نسبته $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومركزه النقطة A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المتتاليات العددية		**التمرين الثاني:** **1) حساب الحدود u_1 ، u_2 :** $u_1=\sqrt{u_0^{\,2}+2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ ، $u_2=\sqrt{u_1^{\,2}+2}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$ **2) تبيين ان المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:** $u_2u_0\neq u_1^{\,2}$ أي $\sqrt{5}\neq 3$ اذن المتتالية (u_n) ليست هندسية خاصية الوسط الهندسي غير محققة $u_0+u_2\neq 2u_1$ أي $1+\sqrt{5}\neq 2\sqrt{3}$ اذن المتتالية (u_n) ليست حسابية الوسط الحسابي غير محقق **3)** **أ) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 و حساب حدها الاول v_0 :** لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}^2+3=(u_n^2+3)+2=v_n+2$ ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابيةاساسها $r=2$ وحدها الاول $v_0=u_0^2+3=1+3=4$ **ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :** لنا $n\in\mathbb{N}$, $v_n=2n+4$ ومنه $u_n=\sqrt{v_n-3}=\sqrt{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ **ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2n+1}=+\infty$ **4) كتابة بدلالة n المجموعيين S ، S' :** **نجد** $S=v_0+v_1+...+v_n$ ومنه $S=(n+1)(n+4)$ **أيضا** $S'=u_0^2+u_1^2+...+u_n^2$ ومنه $S'=S-3(n+1)=(n+1)^2$.	04
الهندسة الفضائية		**التمرين الثالث:** **1) تبيين أن النقط A,B و C تشكل مستو:** لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و لنا : $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}\neq\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$ إذن فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقاط A,B و C تشكل مستو **2)** **أ) تبيين ان المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) :** لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{u}=(1)(2)+(-1)(-1)+(-1)(3)=0\\ \overrightarrow{AC}\,.\,\vec{u}=(2)(2)+(-5)(-1)+(-3)(3)=0\end{cases}$ اذن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لان شعاع توجيهه يعامد شعاعي توجيهه. **ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :** بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{u}(2;-1;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه نجد : $2x-y+3z+d=0$ $A\in(ABC)$: $-2(0)-3(4)+3(1)+d=0$ اذن : $d=4$ و بالتالي : $(ABC):2x-y+3z+4=0$.	04

3)

أ) تبيين ان المستويين (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') :

لدينا: المستقيم (D') معرف بتمثيله الوسيطي : $t \in \mathbb{R}$ .....

$$\begin{cases} x = -2 - 4t & .....(1) \\ y = t & .....(2) \\ z = 2 + 3t & .....(3) \end{cases}$$

و المستويين (P) و (P') معرفين بمعادلتهما :

$$(P): x + y + z = 0.....(4) \qquad (P'): x + 4y + 2 = 0.....(5)$$

بتعويض (1) و (2) و(3) في (4) و (5) على التوالي نجد :

$$(-2-4t)+(t)+(2+3t)=0 \quad \text{و} \quad (-2-4t)+4(t)+2=0$$

اذن : $(P) \cap (P') = (D')$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين المستوي (ABC) والمستقيم (D') :

لدينا : $\vec{u}_{(D')} \cdot \vec{cn}_{ABC} = (2)(-4)+(-1)(1)+(3)(3)=0$ و $c\vec{n}_{ABC}$ و $A \notin (D')$ و $B \notin (D')$ اذن : $(D') \parallel (ABC)$.

التمرين الرابع:

(I

1) دراسة تغيرات الدالة g على $[0;+\infty[$:

أ) النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[0;+\infty[$:

الدوال العددية

حساب $g'(x)$: $g'(x) = \dfrac{-x}{(x+1)^2}$

08

دراسة إشارة $g'(x)$: لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $(x+1)^2 > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ تعتمد على إشارة البسط x- لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $-x \leq 0$

وبالتالي : من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $g'(x) \leq 0$

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$-$

II) 1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معدلتيهما $y=0$ و $y=1$

2) أ) تبيين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x}g(e^x)$:

$$f'(x)=(e^{-x}\ln(e^x+1))'=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=e^{-x}g(e^x)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}>0$

و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x>0$

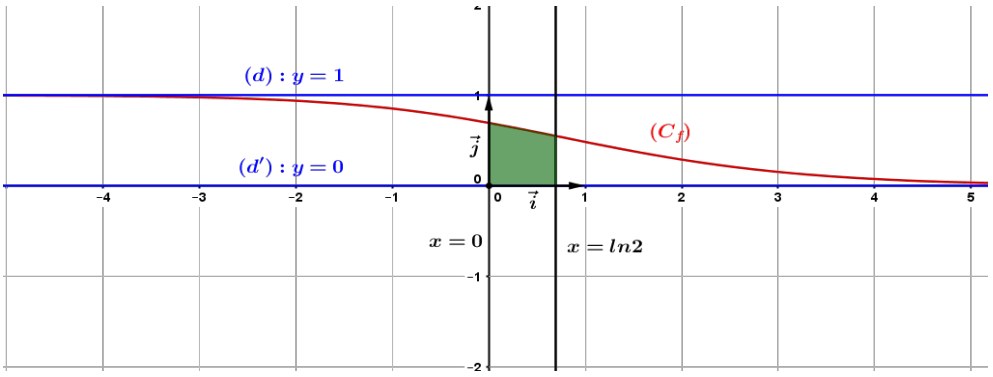
وبما أن $g(x)$ سالبة على المجال $[0;+\infty[$ فان $g(e^x)<0$

وبالتالي : من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

3) إنشاء (C_f) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$:



4) أ) تبيين أن الدالة $F(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(x-(e^{-x}+1)\ln(e^x+1)\right)'=e^{-x}\ln(e^x+1)=f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) حساب A المساحة بـ cm^2 :

$$A=1\times1\left[\int_0^{\ln2}\left(e^{-x}\ln(e^x+1)\right)dx\right]=\left[x-(e^{-x}+1)\ln(x+1)\right]_0^{\ln2}\approx0.43\,cm^2$$

لوطاية في 2019/05/23

الدوال الأصلية وحساب المساحات

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المسيلة **ثانويتا "زرواق بوزيد ، زابي صالح"**

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي **دورة: ماي 2019**

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة :03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات $Z_A=\sqrt{3}-i$ ؛ $Z_B=\sqrt{3}+i$ ؛ $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ – علم النقط A ، B ، C و D .

ب – اكتب العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ – تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D.

أ – اثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .

ب – تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C.

4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1، 1–، 2 على الترتيب.

عين احداثيي النقطة G ، ثم بين ان (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق

$MA^2-MB^2+2MC^2=8$ هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_n=e^{-2n}$ حيث e أساس اللوغاريتم النبيري

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول

ب) احسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+.....u_n$ ثم استنتج الجداء $p_n=u_0\times u_1\times\cdots\cdots\times u_n$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 4–

ب) احسب المجموع $S'_n=v_0+v_1+.....v_n$ ، ثم عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $S'^2_n=2^{30}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوي (P) ذو المعادلة $3x+y-z-1=0$ و (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$

1- أ- هل النقطة $C(1;3;2)$ تنتمي إلى المستوي (P) ؟

ب- بين أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

2- ليكن المستوي (Q) الذي يشمل C و عمودي على (Δ)

أ- عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

ب-أحسب إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستوي (Q) و المستقيم (Δ) ، ثم بين أن $CI=\sqrt{3}$

3- ليكن t عدد حقيقي و M_t نقطة من (Δ) إحداثيتها $(-t+1;2t;-t+2)$

أ- تحقق من أجل كل عدد حقيقي t : $CM_t^{\,2}=6t^2-12t+9$

ب- بين أن CI هي القيمة الصغرى لـ CM_t لما t يتغير في $\mathbb{R}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- f دالة معرفة على R بـ : $f(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

1) احسب الدالة المشتقة للدالة f

2) عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني للدالة f يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$

و يقبل في النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل .

II- f دالة معرفة على R بـ : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

و ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . وحدة الطول $2cm$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.

2) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (d_1) و (d_2)

معادلتيهما : $y=x+2$ و $y=x-2$ عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2).

5) ارسم (d_1) ، (d_2) و (C) .

6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة : $f(x)=x+m$ حلا وحيدا

7) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي

معادلاتها : $y=x+2$ و $x=0$ و $x=\ln 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\bar{z}_A$.

أثبت أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛

ثم بين أن النقط A ؛ C و E في استقامية .

5) أ- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ؛ ($z\neq z_C$) .

ب- عين (E_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $Z=\sqrt{3}+ke^{\frac{\pi}{4}i}$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+^*$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;0;2)$ ؛ $B(0;1;2)$ ؛ $C(1;-2;0)$
و المستوي (p) الذي معادلته $3x-2y+z+3=0$.

1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

2) أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان .

ب) بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=t-1\\y=4t\\z=5t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

جـ) أحسب المسافة بين النقطة $H(-1;6;-2)$ و المستوي (ABC) ،

ثم بين أن المسافة بين النقطة H و المستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $x^2+y^2+z^2+2x-12y+4z+3=0$

أ) بين أن (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب) ما هو الوضع النسبي للمجموعة (Γ) و المستقيم (Δ)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) يحتوي كيس u_1 على 5 كريات بيضاء و7 كريات حمراء ، لا نفرق بينها باللمس .
يسحب لاعب عشوائيا 3 كريات في آن واحد .

أ- احسب احتمالات الحوادث التالية : A : يسحب اللاعب 3 كريات من نفس اللون.

B : يسحب اللاعب 3 كريات بحيث سحب كريات بيضاء أكبر من سحب كريات حمراء.

ب- يربح اللاعب 10 دنانير من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة ،

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الربح المحصل عليه .

عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .

2) يحتوي كيس u_2 على 2 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء ، لا نفرق بينها باللمس

يسحب لاعب عشوائيا 3 كريات بحيث يسحب من كيس u_1 كرتين في آن واحد و من كيس u_2 كرية واحدة

احسب احتمال الحادثة التالية : C : حصول اللاعب على ثلاث كرات حمراء.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{2x}{x+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $1cm$.

1) احسب كل من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$.

2) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

3) عين اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) احسب $f(0)$ ثم ارسم (C) .

5) نعتبر في $]-1;+\infty[$ الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$.

أ. احسب $h'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة h .

ب. شكل جدول تغيرات الدالة h . (نقبل ان $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$)

ج. بين ان المعادلة $h(x)=0$ تقبل في $]-1;+\infty[$ حلين احدهما 0 والحل الثاني α حيث $2\prec\alpha\prec 3$.

د. استنتج حسب قيم x من $]-1;+\infty[$ جدول إشارة $h(x)$.

6) (Δ) مستقيم معادلته $y=x$ ، استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

7) لتكن F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $F(x)=(x-1)\ln(x+1)+x+1$.

أ. بين ان الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

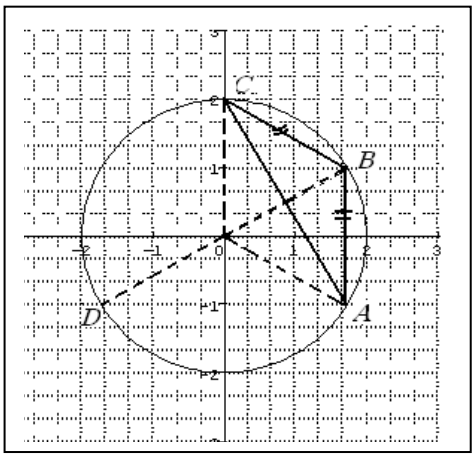
ب. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .و المستقيمين ذي المعادلة $x=0$ و $x=2$ على الترتيب .

بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2019 و رمضان مبارك

الموضوع الأول

التمرين الأول: 1)حلول المعادلة: لدينا $Z-2i=0$ أو $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0$ و $\Delta=-4$ أي $\sqrt{\Delta}=2i$

إذن $Z=2i$ أو $Z=\sqrt{3}-i$ أو $Z=\sqrt{3}+i$.



2)أ- تعليم النقط :

ب- لدينا الشكل الجبري $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}=\frac{-2i}{-\sqrt{3}+i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا $[r,\theta]=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$ إذن الشكل الآسي $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\left|\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}\right|=\frac{|Z_A-Z_B|}{|Z_C-Z_D|}=1$ إذن $|Z_A-Z_B|=|Z_C-Z_D|$

ومنه $BA=BC$ و منه المثلث ABC متساوي الساقين.

ج - لدينا $|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=|Z_D|=2$

النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$

3) أ) لدينا $\begin{cases}S(O)=A\\S(C)=D\end{cases}$ و $Z'=aZ+b$ إذن $\begin{cases}Z_A=aZ_O+b\\Z_D=aZ_C+b\end{cases}$ أي $a=\sqrt{3}i$ و $b=\sqrt{3}-i$

إذن $S:Z'=\sqrt{3}iZ+\sqrt{3}-i$ هو تشابه مباشر مركزه (النقطة الصامدة) لاحقتها $Z_w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

و نسبته $k=\left|\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$ وزاويته عمدة $\sqrt{3}i$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ب) $Z_C=\sqrt{3}iZ_B+\sqrt{3}-i$ أي $2i=\sqrt{3}i\left(\sqrt{3}+i\right)+\sqrt{3}-i$ إذن $2i=2i$ محققة

4) أ- بما ن $2+2-1=3\neq0$ إذن G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$ ومنه $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أي $(Z_A-Z_G)-(Z_B-Z_G)+2(Z_C-Z_G)=0$ إذن $Z_G=i$ ومنه $G(0,1)$

ب - لدينا $MA^2-MB^2+2MC^2=8$ ومنه $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=8$

اي $2MG^2+2\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{MG}+GA^2-GB^2+2GC^2=8$ اذن $MG^2=1$ ومنه

مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة G ونصف قطرها 1 .

التمرين الثاني:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_n=e^{-2n}$ حيث e أساس اللوغاريتم النبيري

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-2n-2}}{e^{-2n}}=e^{-2}$ و $u_0=e^{-2\times0}=1$

ب) احسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+.....u_n$

لدينا : $S_n=u_0+u_1+.....u_n=u_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=1\times\frac{\left(e^{-2}\right)^{n+1}-1}{e^{-2}-1}=\frac{e^2}{e^2-1}\left[1-e^{-2n-1}\right]$

استنتج الجداء $p_n=u_0\times u_1\times\cdots\cdots\times u_n=e^0\cdot e^{-2}.....e^{-2n}=e^{-n(n+1)}$

2) أ) إثبات أن (v_n) متتالية حسابية : لدينا : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

$v_{n+1}-v_n=\ln u_{n+2}-\ln u_n=\ln\left(\frac{u_{n+2}}{u_n}\right)=\ln e^{-4}=-4$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها -4 و حدها الأول $v_0 = \ln u_0 + \ln u_1 = 0 + (-2) = -2$.

ب) تعيين العدد الطبيعي n حيث : $S'^2_n = 2^{30}$

لدينا : $S'_n = v_0 + v_1 + ...v_n = \frac{n+1}{2}\left(-2 + (-2-4n)\right)$ و منه : $S'_n = -2(n+1)^2$

لكن : $S'^2_n = 2^{30}$ يكافئ $\left[-2(n+1)^2\right]^2 = 2^{30}$ أي $(n+1)^4 = 2^{28}$ و منه $(n+1)^4 = 2^{7\times 4}$

و منه $(n+1)^4 = \left(2^7\right)^4$ و منه $n+1 = 2^7$ و بالتالي $n = 127$.

التمرين الثالث :

1- أ- $C \in (P)$ معناه $3\times 1 + 3 - 2 - 1 = 0$ أي $3 = 0$ وهذا خطا،إذا C لا ينتمي إلى (P).

ب- M نقطة من (Δ) معناه $3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0$أي $-3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$ محققة مهما يكن t

إذا (Δ) محتواة في المستوي (P)

2- أ- إحداثيات الشعاع الناظمي لـ (Q) هما : $(-1;2:-1)$ ، $M(x;y;z) \in (Q)$ معناه $-x + 2y - z + d = 0$

و بما أن $C \in (Q)$ فإن $-1 + 2\times 3 - 2 + d = 0$ إي $d = -3$ إذا $(Q): -x + 2y - z - 3 = 0$

ب- $M \in (Q)$ معناه $-(-t+1) + 2\times 2t - (-t+2) - 3 = 0$ أي $6t - 6 = 0$ أي $t = 1$ و عليه $I(0;2;1)$

جـ/ لدينا $\overrightarrow{CI}(-1;-1;-1)$ ومنه $CI^2 = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CI} = 1+1+1 = 3$ إذا $CI = \sqrt{3}$

3/ لدينا $\overrightarrow{CM_t}(-t;2t-3;t)$ ومنه $CM_t^2 = \overrightarrow{CM_t}.\overrightarrow{CM_t} = (-t)^2 + (2t-3)^2 + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$

ب/ نضع $f(t) = 6t^2 - 12t + 9$ ، $f'(t) = 12t - 12$ ، $f'(t)$ تنعدم من أجل $t = 1$ و تغير من إشارتها وعليه القيمة الصغرى لـ $f(t)$ أي CM_t^2 هي 3 وعليه القيمة الصغرى لـ

CM_t هي $\sqrt{3}$ إذا CI هي القيمة الصغرى.

التمرين الرابع : I- 1) حساب مشتقة الدالة f : $f'(x) = a - \frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$

2) تعيين العددين a و b علما أن التمثيل البياني يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$و يقبل في النقطة A موازيا لمحور الفواصل أي : $f(\ln 2) = \ln 2$ و $f'(\ln 2) = 0$.أي : $a\ln 2 + b - \frac{8}{2} = \ln 2$ و $a - \frac{16}{16} = 0$ أي $a = 1$ و $b = 2$.

II- f دالة معرفة على R بـ : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$.

1) تحقق $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2} = x + 2 - 4 + \frac{8}{e^x+2} = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$.

2) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}\right] = -\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 2 + \frac{8}{e^x+2}\right] = +\infty$$

3)اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها: الدالة f تقبل الاشتقاق على R.

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}$$ وبالتالي f' موجبة وتنعدم عند $\ln 2$.

ومنه : الدالة f متزايدة تماما على R.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f (x)	$-\infty$ ↗		↗ $+\infty$

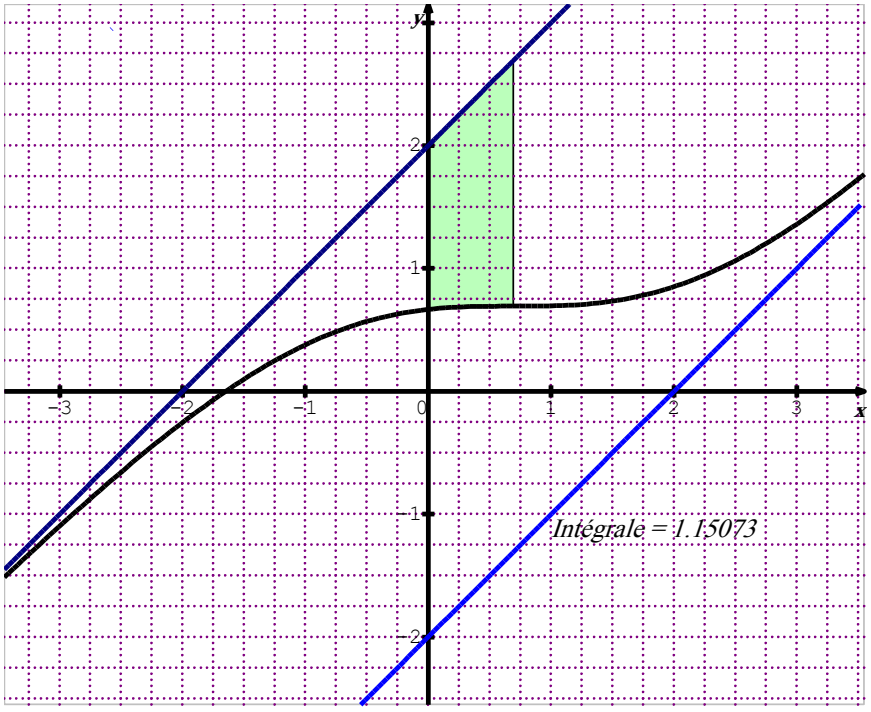
4) أ- (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (d_1) و (d_2): $y=x+2$ و $y=x-2$ عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{8}{e^x+2}\right]=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x+2}\right]=0$

ب- الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2).

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-(x-2)=\frac{8}{e^x+2}$ وهو موجب تماما و $f(x)-(x+2)=\frac{-4e^x}{e^x+2e}$ وهو سالب تماما و بالتالي : (C) تحت (d_1) و فوق (d_2).

5)رسم (d_1) ، (d_2)و (C).



6) المعادلة : $f(x)=x+m$ حلا وحيدا لما $m\in[-2;2]$

7)حساب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي S المحدد بالمنحني(C) والمستقيمات التي معادلاتها :

$y=x+2$ و $x=0$ و $x=\ln 2$.

$$S=\int_0^{\ln 2}\left[(x+2)-f(x)\right]dx=\int_0^{\ln 2}\frac{4e^x}{e^x+2}dx=\left[4\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^{\ln 2}=4\left[\ln 4-\ln 3\right]ua=16\left[\ln 4-\ln 3\right]cm^2$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2-\sqrt{3}\,z+1\right)=0$ يكافئ $z-\sqrt{3}=0$ او $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ أي ان $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز للمعادلة الثانية $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z''=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ مجموعة الحلول هي $S=\left\{\sqrt{3}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\ })$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\bar{z}_A$.

اثبات أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$z_A{}^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}$ و منه $z_A{}^{1962}=e^{-327\pi i}=\cos(-327\pi)+i\sin(-327\pi)=-1$

و $z_C{}^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016}$ و منه $z_C{}^{2016}=e^{336\pi i}=\cos(336\pi)+i\sin(336\pi)=+1$ و منه $-1+1=0$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^n=e^{-\frac{n\pi}{3}i}=\cos\left(\frac{-\pi n}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1$و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ أي ان $\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\pi k$ و k عدد طبيعي

و منه نجد $n=6k$ و k عدد طبيعي

3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي لدينا

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{6}i}}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ :\ k\in Z$ فإن

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1-2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A$$ و منه

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)+\left(1-1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$ ومنه

$$z_E = \sqrt{3}+3i-i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا

$$z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=2i$$ و

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=i$$ و منه $z_E - z_A = 2(z_C - z_A)$ أي ان

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.

5) أ- تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا $(z \neq z_C)$

يعني أن $k \in Z : k\pi + \frac{\pi}{2}$ $= \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)$ و هذا يعني أن $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ و منه

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.

ب - $Z = \sqrt{3}+ke^{\frac{\pi}{4}i}$ معناه $Arg(z-z_B)=\frac{\pi}{4}$

(Ψ_2) هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه النقطة B والموجه بالشعاع $\vec{U}$ حيث $(\vec{i};\vec{U})=\frac{\pi}{4}$

<u>التمرين الثاني:</u>

1) أ) بما ن $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-2;-2)$ و $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{-2}$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) لدينا $\vec{n}(1;1;-1)\perp\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ و $\vec{n}(1;1;-1)\perp\overrightarrow{AC}(0;-2;-2)$ إذن $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC).نستنتج ان معادلة المستوي (ABC) هي $x+y-z+1=0$.

2) أ) لدينا $\vec{n}(1;1;-1)$ و $\vec{n}_P(3;-2;1)$ متعامدان إذن المستويين (P) و (ABC) متعامدان .

ب) لدينا جملة التقاطع $\begin{cases}x+y-z+1=0\\3x-2y+z+3=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}(t-1)+(4t)-(5t)+1=0\\3(t-1)-2(4t)+z(5t)+3=0\end{cases}$ إذن الجملة محققة.

جـ) المسافة بين النقطة H و المستوي (ABC) هي $d=\frac{|(-1)+(6)-(-2)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

المسافة بين النقطة H و المستوي (P) هي $d'=\frac{|3(-1)-2(6)+(-2)+3|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

و بما ن $d''^2=d'^2+d^2$ إذن $d''^2=\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\sqrt{14}\right)^2$ أي أن $d''=\sqrt{\frac{106}{3}}$

3) أ) لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $x^2+y^2+z^2+2x-12y+4z+3=0$

ومنه $\left[(x+1)^2-1\right]+\left[(y-6)^2-36\right]+\left[(z+2)^2-4\right]+3=0$

أي أن $(x+1)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=38$.إذن المجموعة (Γ)هي سطح كرة مركزها H و نصف قطر $r=\sqrt{38}$.

ب) بما ان $\sqrt{\frac{106}{3}}<\sqrt{38}$ إذن المستقيم (Δ) يقطع الكرة (Γ) في نقطتين هما بتعويض (Δ) في (Γ)

نجد $L_1\left(\frac{-14-2\sqrt{7}}{21};\frac{28-8\sqrt{7}}{21};\frac{35-10\sqrt{7}}{21}\right)$ و $L_2\left(\frac{-14+2\sqrt{7}}{21};\frac{28+8\sqrt{7}}{21};\frac{35+10\sqrt{7}}{21}\right)$

التمرين الثالث:

يسحب لاعب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من بين 12 كرية $C_{12}^3=\frac{12\times11\times10}{3\times2}=44$

أ- احتمال الحوادث التالية : A : يسحب اللاعب 3 كريات من نفس اللون $p(A)=\frac{C_5^3+C_7^3}{C_{12}^3}=-$.

B : يسحب اللاعب 3 كريات كريات بيضاء أكبر كريات حمراء $p(B)=\frac{C_5^3C_7^0+C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=$

ب-قانون احتمال المتغير العشوائي X : لدينا قيم X هي 0 1 2 3 $p(X=0)=\frac{7}{44}$

يسحب اللاعب كرية بيضاء واحدة فقط ، $p(X=10)=\frac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{5\times\frac{7\times6}{2}}{\frac{12\times11\times10}{3\times2}}=\frac{21}{44}$

يسحب اللاعب كريتين بيضاويتين فقط. $p(X=20)=\frac{C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{7\times\frac{5\times4}{2}}{\frac{12\times11\times10}{3\times2}}=\frac{7}{22}$

يسحب اللاعب 3 كريات بيضاء. $p(X=30)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{\frac{5\times4\times3}{3\times2}}{\frac{12\times11\times0}{3\times2}}=\frac{1}{22}$.

x_i	0	10	20	30
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=0\times\frac{7}{44}+10\times\frac{21}{44}+20\times\frac{14}{44}+30\times\frac{2}{44}=\frac{50}{4}$.

2) احتمال الحادثة التالية : C : حصول اللاعب على ثلاث كرات حمراء $p(C)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}\times\frac{C_3^1}{C_5^1}=$

التمرين الرابع :

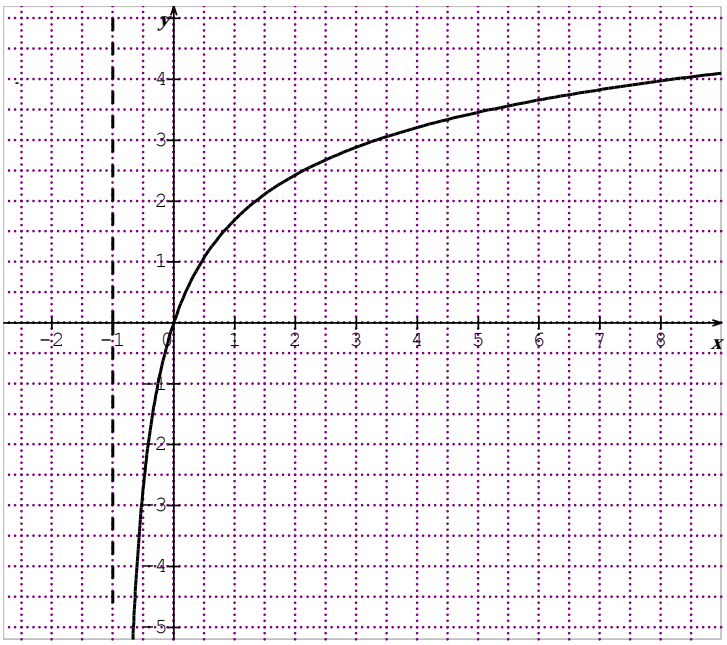
f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{2x}{x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $1cm$.

1. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لان $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)=2\right)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$ لان $\left(\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty,\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)=-\infty\right)$.

2. ليكن x من $]-1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{(1+x)+2x+2-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$.

3. من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا $\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

4.



جدول تغيراتها .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ / $-\infty$

5. $f(0)=0$ رسم (C) .

6. نعتبر في $]-1;+\infty[$ الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$.

أ. لدينا $h'(x)=f'(x)-1$ ومنه $h'(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}-1=\dfrac{x+3-(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$

ومنه $h'(x)=0$ معناه $-x^2-x+2=0$ ومنه $\Delta=9$ $x_1=1;\ x_2=-2$ (مرفوض) ومنه $x=1$

لدينا

x	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]-1;1]$

و متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

ب. جدول تغيراتها كما يلي

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

x	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$	$\ln 2+1$	$-\infty$

ج . لدينا $h(0)=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $h(x)=0$ و بما ان $h(2)\approx 0.43$ $h(3)\approx -0.11$و بما ان الدالة h مستمرة و متناقصة تماما على $[2;3]$ فان المعادلة $h(x)=0$ تقبل في $]2;+\infty[$ حل وحيد α حيث $2\prec\alpha\prec 3$

د. جدول إشارة $h(x)$.

x	-1	0	α	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$

6) (Δ) مستقيم معادلته $y=x$ ،
استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

x	-1	0	α	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$ 0	$-$

اذا كان $x=0$ او $x=\alpha$ فان (C) و (Δ) متقاطعان
اذا كان $x\in\,]0;\alpha[$ فان (C) يقع فوق (Δ).
اذا كان $x\in\,]-1;0[\cup]\alpha;+\infty[$فان (C) يقع تحت (Δ) .
7) لتكن F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ ب: $F(x)=(x-1)\ln(x+1)+x+1$.
أ) F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ لان

$$F'(x)=\ln(x+1)+(x-1)\frac{1}{x+1}+1=\ln(x+1)+\frac{x-1+x+1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{2x}{x+1}=f(x)$$.

ب) مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) .و المستقيمين ذي المعادلة $x=0$ و $x=2$ هي

$$A=\int_0^2\left(f(x)-x\right)dx=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=F(2)-\frac{1}{2}(2)^2-F(0)=\ln 3+3-2-1=\ln 3cm^2$$