الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2021

شعبة: التقني رياضي — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. f الدالة المعرفة على المجال $I=[0;1]$ بـ: $f(x)=xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال I.
2. بين أنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$.

   ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

   ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 2، 2، 4 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 2، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و B: سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
2. بين أن $P(A\cap B)=\frac{5}{56}$ ثم استنتج $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 9.

ب) بين أن العدد $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}$ مضاعف للعدد 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=1+2+4+...+2^n$.

أ) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_n=2^{n+1}-1$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv 0[9]$.

ب) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}=2a_n+1$ ثم استنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}+\ln(2)-\ln(x+1)$ و جدول تغيراتها المقابل.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن $f(\beta)=\beta-2\ln(2)-1+\dfrac{1}{\beta+1}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\beta)$.

3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثييها.

ب) أكتب معادلة للمماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω.

4. أ) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) يعطى $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0),(7,26;0),(-0,88;0)\}$ و $\begin{cases}\alpha=-0,63\\ f(\alpha)=-0,33\end{cases}$ ، $\begin{cases}\beta=3,31\\ f(\beta)=1,16\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة.

ج) وضح كيف يمكن رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-f(x)$ انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x-7y=13$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. بين أنه إذا كان العدد الطبيعي d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y فإن $d=1$ أو $d=13$.
2. أ) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$.
   ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
3. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{56\beta5}$ في النظام ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{310\alpha1}$ في النظام ذي الأساس 5 حيث α و β عددان طبيعيان.
   - ✓ جد العددين α و β ثم أكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الثاني: 04 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n^2$.
2. ليكن المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.
   - ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1}\equiv u_n\,[5]$.
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_{n+1}-u_n}$.
   أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n.
   ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_{n-1}$ ثم استنتج مرة أخرى أن $u_n=n^2$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

I. عين العددين المركبين α و β حيث $\begin{cases} 2\alpha-\sqrt{3}\beta=3\sqrt{3}-i \\ \alpha i-\beta=0 \end{cases}$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C=-1+\sqrt{3}i$.

1. أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقي سالب تماما.
2. أكتب z_B على الشكل المثلثي و الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وحدد طبيعة المثلث OAC ثم عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ج) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $Arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$ مع k عدد صحيح.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=2e^x-ex-e$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والأخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2e^{-x}+\frac{1}{2}ex^2-ex$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[-1;-\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim\limits_{x\to-\alpha}\frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
4. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-ex$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-h(x)\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h).

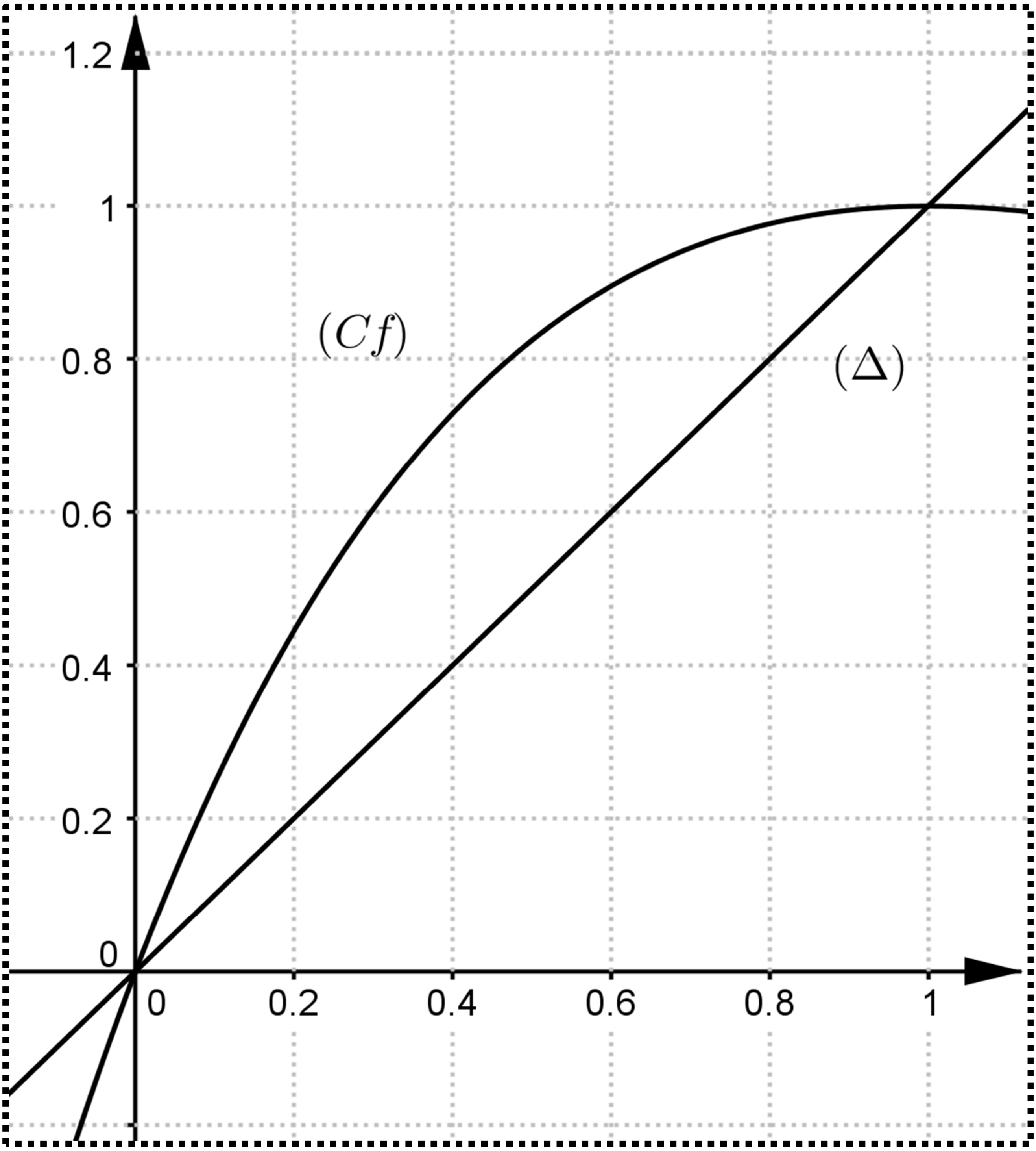
5. أ) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f). نقبل أن $\begin{cases}(C_f)\cap(xx')=\{(2,1;0)\}\\ f(-\alpha)=-2,24\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=m$ حلين موجبين و حل سالب.

انتهـــــــــــى الموضـــــوع الثاني

الوثيقة المرفقة

الاسم:	اللقب:



التصحيح النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

المستوى: 3 ر

الموضوع الأول:

حل التمرين الأول:

I) 0,5

1) تبيان أن الدالة f متزايدة على المجال I:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I حيث:

$$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) e^{1-x}$$

لدينا $f'(x) = 0$ تكافئ $x = 1$ لأن $e^{1-x} \neq 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$ لأن $e^{1-x} > 0$

وعليه من أجل $x \in I$ فإن $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على I.

2) تبيان أنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$ 0,5

لدينا $x \in I$ معناه $x \in [0;1]$ ومنه $f(x) \in [f(0);f(1)]$

لأن الدالة f متزايدة على I.

لدينا

$f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

ومنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$.

II) لدينا
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل: 0,5

وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها. 0,5

من البيان نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots$ وعليه يبدو أن (u_n) متزايدة تماما على N. ومتقاربة نحو العدد 1 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)).

0,78

2) أ/ البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $0 < u_n < 1$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $u_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < 1$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $0 < u_n < 1$ ولنبرهن أن

$P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $0 < u_n < 1$ وبما أن f متزايدة على I فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$

أي $0 < u_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n < 1$$

0,5

ب) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما :

لدينا $u_{n+1} - u_n = u_n e^{1-u_n} - u_n = u_n\left(e^{1-u_n} - 1\right)$

لدينا حسب السابق $0 < u_n < 1$ ومنه $-1 < -u_n < 0$ ومنه

$0 < 1 - u_n < 1$ أي $1 < e^{1-u_n} < e$

ومنه $0 < e^{1-u_n} - 1 < e - 1$

وعليه $e^{1-u_n} - 1 > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

0,25

استنتاج أن (u_n) متقاربة :

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

0,5

جـ) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ / $\ell \in \mathbb{R}$ حيث ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

لدينا $f(\ell) = \ell$ تكافئ $\ell e^{1-\ell} = \ell$ ومنه $\ell\left(e^{1-\ell} - 1\right) = 0$

أي $\ell = 0$ أو $e^{1-\ell} = e^0$ ومنه $\ell = 1$

وبما أن $0 < u_n < 1$ و (u_n) متزايدة تماما فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

حل التمرين الثاني:

B_2	R_0	V_0
B_2	R_2	V_1
B_4	R_2	

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

0,8 $$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

0,8 $$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_2^1}{56} = \frac{1+12}{56} = \frac{13}{56}$$

2) تبيان أن: $P(A\cap B) = \frac{5}{56}$

لدينا

0,8 $$P(A\cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{56} = \frac{5}{56}$$

0,8

استنتاج $P(A\cup B)$:

لدينا

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{18}{56} + \frac{13}{56} - \frac{5}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

1,8

x_i	0	4	8	16
p_i	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 \times C_6^1 + C_2^1 \times C_6^2}{56} = \frac{6+30}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_4^2}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}, \quad P(X=8) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

حساب $E(X)$:

0,8 $$E(X) = \frac{12 + 32 + 48}{28} = \frac{92}{28} = \frac{23}{7}$$

3

حل التمرين الثالث:

1) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9: (1,28)

من أجل $n=0$ فإن $2^0 = 1 \equiv 1 [9]$

من أجل $n=1$ فإن $2^1 = 2 \equiv 2 [9]$

من أجل $n=2$ فإن $2^2 = 4 \equiv 4 [9]$

من أجل $n=3$ فإن $2^3 = 8 \equiv 8 [9]$

من أجل $n=4$ فإن $2^4 = 16 \equiv 7 [9]$

من أجل $n=5$ فإن $2^5 = 32 \equiv 5 [9]$

من أجل $n=6$ فإن $2^6 \equiv 64 \equiv 1 [9]$

وعليه بواقي قسمة 2^n على 9 نلخصها في الجدول التالي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$n \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	7	5	$[9]$

ب) تبيان أن العدد $5 \times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954}$ مضاعف للعدد 9: (1)

لدينا $2021 = 336 \times 6 + 5$ ومنه $2^{2021} \equiv 5 [9]$

ومنه $5 \times 2^{2021} \equiv 25 [9]$ أي $5 \times 2^{2021} \equiv 7 [9]$

لدينا $1441 \equiv 1 [9]$ ومنه $1441^{1962} \equiv 1 [9]$

ولدينا $8 \equiv -1 [9]$ ومنه $8^{1954} \equiv 1 [9]$

وعليه $5 \times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954} \equiv 9 [9]$

$\equiv 0 [9]$

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$ (0,78)

لدينا $2018 \equiv 2 [9]$ ومنه $2018^{6n+4} \equiv 2^{6n+4} [9]$

ومنه $2018^{6n+4} \equiv 7 [9]$

ومنه $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$ تكافئ $2n + 10 \equiv 0 [9]$

ومنه $2n + 1 \equiv 0 [9]$ أي $2n \equiv -1 [9]$ ومنه $2n \equiv 8 [9]$

وعليه $2n \equiv 2 \times 4\ [9]$ أي $n \equiv 4\ [9]$ لأن 2 و 9 أوليان فيما بينهما ومنه $n = 9k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$

أ/ تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2^{n+1} - 1$

0,5

لدينا $a_n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$

لأن 2^n حدود متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1 وعدد الحدود $n+1$.

0,5

تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0\ [9]$

لدينا $a_n \equiv 0\ [9]$ معناه $2^{n+1} - 1 \equiv 0\ [9]$ ومعناه $2^{n+1} \equiv 1\ [9]$

وعليه $n+1 = 6k$ ومنه $n = 6k - 1$ أي $n = 6k + 5$

حيث $k \in \mathbb{N}$.

0,5

ب) تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

لدينا $a_{n+1} = 2^{n+1+1} - 1 = 2 \times 2^{n+1} - 2 + 1$

ومنه $a_{n+1} = 2(2^{n+1} - 1) + 1$

وعليه: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

0,5

استنتاج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما:

لدينا $a_{n+1} = 2a_n + 1$ يكافئ $a_{n+1} - 2a_n = 1$ وعليه

حسب مبرهنة بيزو ينتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

حل التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1)$ حيث $D_g =]-1;+\infty[$

(1)

1/ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث

$-0,7 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجالين $]-0,7;-0,6[$ و $]3,2;3,4[$

و $g(-0,7) \times g(-0,6) < 0$ ، $g(3,2) \times g(3,4) < 0$

لأن $\begin{cases} g(-0,7) = \\ g(-0,6) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} g(3,2) = \\ g(3,4) = \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

0,8

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	-1		α		β		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

II) لدينا $f(x) = (2+\ln 2)x - (x+2)\ln(x+1)$

1) أ) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ثم حساب $\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x)$

لدينا

0,8 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \cancel{(x+2)}\left(\frac{(2+\ln 2)x}{x+2} - \ln(x+1)\right) = -\infty$

0,25 $\lim\limits_{x \to -1^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^{>}} \cancel{(x+2)}(2+\ln 2)x - \cancel{(x+2)}\cancel{\ln(x+1)} = +\infty$

0,8 ب) تبيان أنه من أجل $x \in]-1;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$

لدينا من أجل $x \in]-1;+\infty[$ فإن:

$f'(x) = 2+\ln 2 - \left(\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1}\right) = 2+\ln 2 - \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$

ومنه $f'(x) = \frac{2x+2-x-2}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1)$

ومنه $f'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1) = g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

0,8

x	-1		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	$-\infty$

2) تبيان أن $f(\beta) = \beta - 2\ln(2) - 1 + \dfrac{1}{\beta+1}$

لدينا $f(\beta) = (2+\ln 2)\beta - (\beta+2)\ln(\beta+1)$

ولدينا $g(\beta) = 0$ معناه $\ln(\beta+1) = \dfrac{\beta}{\beta+1} + \ln(2)$

ومنه $f(\beta) = 2\beta + \beta\ln 2 - (\beta+2)\left(\dfrac{\beta}{\beta+1} + \ln 2\right)$

0,8

$= 2\beta + \cancel{\beta\ln 2} - \dfrac{\beta^2+2\beta}{\beta+1} - \cancel{\beta\ln 2} - 2\ln 2$

$= 2\beta - \dfrac{\beta^2+\beta+\beta}{\beta+1} - 2\ln 2 = 2\beta - \beta - \dfrac{\beta}{\beta+1} - 2\ln 2$

$= \beta - 2\ln 2 - \dfrac{\beta+1-1}{\beta+1} = \beta - 2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{\beta+1}$

وعليه $f(\beta) = \beta - 2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{\beta+1}$

احصاء حصر لـ $f(\beta)$:

0,8

لدينا $3{,}2 < \beta < 3{,}4$ ومنه $4{,}2 < \beta+1 < 4{,}4$ ومنه

$0{,}81 < \beta - 2\ln 2 - 1 < 1{,}01$ ولدينا $0{,}23 < \dfrac{1}{\beta+1} < 0{,}24$

وعليه $1{,}04 < f(\beta) < 1{,}25$

0,8 3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثيها :

لدينا من أجل $x \in]-1,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$

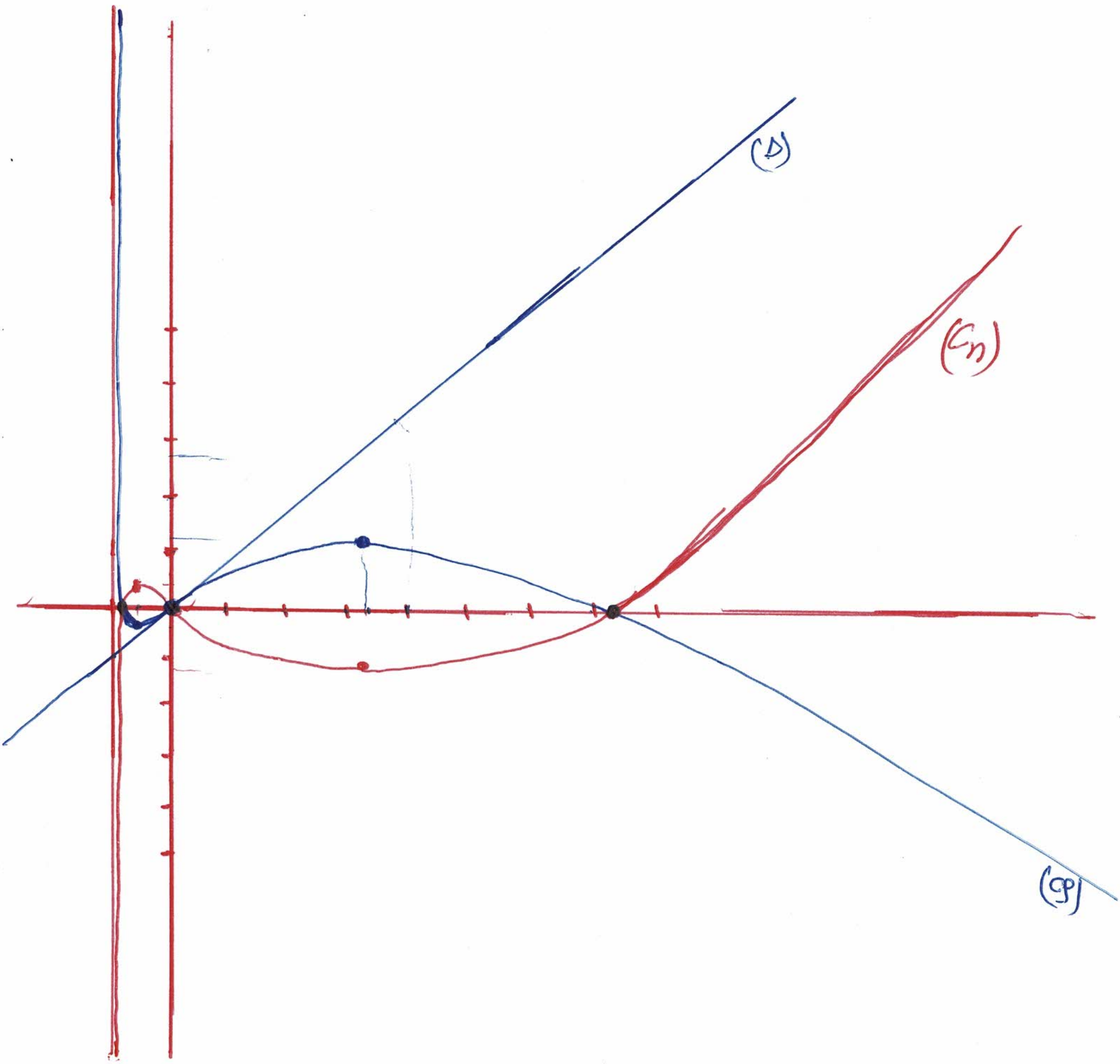
وعليه انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=0$ وتغير اشارتها وبالتالي النقطة $\omega(0;0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

0,8 ب) كتابة معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة ω :

لدينا $(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $(\Delta): y = \ln(2)x$

0,78

4) أرسم كلا من (Δ) و (C_f):



ب) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة:

لدينا من أجل $f(m)\in\,]f(\alpha);f(\beta)[$ أي $m\in$

لدينا من أجل $0\leqslant|m|<\ln 2$ أي من أجل $|m|\geqslant 0$ و $|m|<\ln 2$

ومنه من أجل $m\in\,]-\ln 2;\ln 2[$ فإن المعادلة $f(x)=|m|x$ تقبل ثلاث حلول متمايزة

0,18

ج) وضّح كيفية رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x) = -f(x)$ انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق. (0,5)

بما أن $h(x) = -f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

الموضوع الثاني:

حل التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية $5x-7y=13$

1) تبيان أنه إذا كان $PGCD(x;y)=d$ فإن $d=1$ أو $d=13$: 0,5

لدينا $d|x$ و $d|y$ ومنه $d|5x-7y$ أي $d|13$

ولما أن 13 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=13$

2) أ) إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$ 0,5

لدينا $\begin{cases} 5x_0-7y_0=13 & (1) \\ x_0-y_0=13 & (2) \end{cases}$ ومنه من (2) نجد أن $y_0=x_0-13$ ومنه

$5x_0-7x_0+91=13$

ومنه $2x_0=78$ إذن $x_0=39$

وعليه $y_0=39-13=26$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$ هو الثنائية $(39;26)$

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E): 0,75

لدينا $\begin{cases} 5x-7y=13 \\ 5\times39-7\times26=13 \end{cases}$ ومنه $5(x-39)-7(y-26)=0$

أي $5(x-39)=7(y-26)$ ولما أن 5 و 7 أوليان فيما بينهما فإن حسب مبرهنة غوص

أي $\begin{cases} 5|y-26 \\ 7|x-39 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y-26=5k \\ x-39=7k \end{cases}$ $\begin{cases} x=7k+39 \\ y=5k+26 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=7k+4 \\ y=5k+1 \end{cases}$ حيث k عدد صحيح.

ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(7k+4;5k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

طـ2:

لدينا $5x-7y=13$ ومنه $5x=7y+13$ أي $5x\equiv13[7]$

ومنه $5x\equiv20[7]$ أي $5x\equiv5\times4[7]$ ومنه $x\equiv4[7]$

لأن 5 و 7 أوليان فيما بينهما. ومنه $x=7k+4$

ولدينا $7y=5x-13$ أي $7y\equiv-13[5]$ ومنه $7y\equiv2[5]$

أي $7y\equiv7[5]$ ومنه $y\equiv1[5]$ ومنه $y=5k+1$

وعليه حلول المعادلة هي الثنائيات $(7k+4;5k+1)/k\in\mathbb{Z}$

3) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$ (0,75)

لدينا $PGCD(x;y)=13$ معناه $\begin{cases}13 \mid x\\ 13 \mid y\end{cases}$ أي $\begin{cases}x\equiv 0[13]\\ y\equiv 0[13]\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases}7k+4\equiv 0[13]\\ 5k+1\equiv 0[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}7k\equiv 9[13]\\ 5k\equiv 12[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}7k\equiv 35[13]\\ 5k\equiv 25[13]\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}7k\equiv 7\times 5[13]\\ 5k\equiv 5\times 5[13]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\equiv 5[13]\\ k\equiv 5[13]\end{cases}$

لأن $PGCD(7,13)=1$ و $PGCD(5;13)=1$

وعليه $k=13p+5$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

ومنه $\begin{cases}x=7(13p+5)+4\\ y=5(13p+5)+1\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=91p+39\\ y=65p+26\end{cases}$

وعليه الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$

هي $(91p+39;65p+26)$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

4) لدينا $N=\overline{310\alpha1}^5$ و $N=\overline{56\beta5}^7$

حيث α و β عددان طبيعيان :

إيجاد العددين α و β :

لدينا $0\leq\alpha\leq 4$ / $N=5\times 7^3+6\times 7^2+7\beta+5=7\beta+2014$

$0\leq\beta\leq 4$ / $N=3\times 5^4+5^3+5\alpha+1=5\alpha+2001$

ومنه $5\alpha+2001=7\beta+2014$ أي $5\alpha-7\beta=13$ (1)

وعليه بالمطابقة مع المعادلة (E) فإن $\begin{cases}\alpha=x\\ \beta=y\end{cases}$ أي $\alpha=7k+4$ ، $\beta=5k+1$

ومنه $\alpha=4$ و $\beta=1$ لأن $0\leq\alpha\leq 4$ ، $0\leq\beta\leq 4$ معناه $k=0$

كتابة N في النظام العشري:

لدينا $\begin{cases}N=2014+7\times 1=2021\\ N=2001+5\times 4=2021\end{cases}$ أو (0,25)

حل التمرين الثاني:

لدينا $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$

0,75

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = n^2$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $U_n = n^2$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = 0 = 0^2$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $U_n = n^2$ ولنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $U_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

وبما أن $U_n = n^2$ فإن $U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{U_n = n^2}$

2) لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*)

0,75

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية (*)

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0 = U_0$

نفترض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ولنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا
$$S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

وبما أن $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

فإن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن:
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

0,5 3) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $U_{n+1} \equiv U_n [5]$

لدينا $U_{n+1} \equiv U_n [5]$ تكافئ $U_{n+1} - U_n \equiv 0 [5]$ أي $(2n+1)$

$2n+1 \equiv 0 [5]$ ومنه $2n \equiv -1 [5]$ أي $2n \equiv 4 [5]$

ومنه $2n \equiv 2\times 2 [5]$ أي $n \equiv 2 [5]$ لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

ومنه $n = 5k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

4) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = e^{U_{n+1}-U_n}$

أ) تبيان أن (V_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول:

0,75

ط1) لدينا $V_n = e^{U_{n+1}-U_n} = e^{2n+1}$

ومنه $V_{n+1} = e^{2n+2+1} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 V_n$

وعليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $V_0 = e$

ط2: $V_{n+1} = e^{U_{n+2}-U_{n+1}} = e^{U_{n+1}+2n+3-U_n-2n-1}$

$= e^{U_{n+1}-U_n+2} = e^2 \times e^{U_{n+1}-U_n} = e^2 V_n$

وعليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $V_0 = e$

كتابة V_n بدلالة n: $V_n = V_0 \times q^n = e \times (e^2)^n = e^{2n+1}$

5) حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_{n-1}$

ط1: لدينا $\ln V_n = 2n+1$ ومنه $(\ln V_n)$ متتالية حسابية ~~أساسها~~ أساسها $r=2$ وحدها الأول 1 وعليه:

0,75

$$S'_n = \frac{n}{2}\left(1 + 2(n-1) + 1\right) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2$$

ط2:

$$S'_n = \ln(V_0 \times V_1 \times \dots \times V_{n-1}) = \ln(V_0 \times V_0 \times q \times \dots \times V_0 \times q^{n-1})$$

$$= \ln\left(V_0^n \times q^{1+2+\dots+n-1}\right) = \ln V_0^n + \ln q^{1+2+\dots+n-1}$$

$$S'_n = n \ln V_0 + \frac{n-1}{2}(n) \times \ln q = n + (n-1)n = n(n-1+1) = n^2$$

استنتاج صورة أخرى أن $U_n = n^2$

لدينا $S'_n = \cancel{U_1} - U_0 + U_2 - \cancel{U_1} + \dots + U_n - \cancel{U_{n-1}}$

$S'_n = U_n - U_0$

0,5

ومنه $\boxed{U_n = S'_n + U_0 = n^2 + 0 = n^2}$

حل التمرين الثالث :

I) تعيين العددين α و β حيث :

(0,8) $\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - i & \text{—— (1)} \\ \alpha i - \beta = 0 & \text{—— (2)} \end{cases}$

لدينا من (2) $\beta = \alpha i$ ومنه (1) تكافئ :

$2\alpha - \sqrt{3}\alpha i = 3\sqrt{3} - i$ أي $\alpha(2 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - i$

ومنه $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3} - i}{2 - \sqrt{3}i} = \dfrac{(3\sqrt{3} - i)(2 + \sqrt{3}i)}{7} = \dfrac{6\sqrt{3} + 9i - 2i + \sqrt{3}}{7}$

$\dfrac{7\sqrt{3} + 7i}{7} = \sqrt{3} + i$

ومنه $\beta = (\sqrt{3} + i)i = -1 + \sqrt{3}i$

وبالتالي $\alpha = \sqrt{3} + i$ $\quad$ $\beta = -1 + \sqrt{3}i$

II) لدينا $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_A$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}i$

(0,78) 1) كتابة كل من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$z_C = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(0,28) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقيا سالبا تماما :

z_A^n حقيقي سالب تماما معناه $\operatorname{Arg}(z_A^n) = \pi + 2k\pi$

أي $n\operatorname{Arg}(z_A) = \pi(1 + 2k)$ ومنه $n\dfrac{\pi}{6} = \pi(1 + 2k)$

ومنه $n = 12k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2) كتابة z_B على الشكل المثلثي والجبري :

(0,28) $z_B = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

(0,28) $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3} + i) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(\sqrt{3} + i)$

$= (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والجبري نجد :

$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$ أي

(0,28) $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

(0,28) $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

3) أ) تبيان أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 0,25

تحديد طبيعة المثلث OAC: 0,5

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$\begin{cases} OC = OA \\ (\vec{OA}; \vec{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وعليه المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين.

تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC: 0,25

بما أن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين فإن I منتصف القطعة $[AC]$

وعليه $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول A إلى C مع تحديد عناصره المميزة: 0,5

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$

ومنه C صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

ج) تبيان أن B هي صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{OC}$: 0,25

B صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{OC}$ معناه $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OC}}$

لدينا

$$\left.\begin{aligned} z_{\vec{AB}} &= z_B - z_A = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1)i - \sqrt{3} - i \\ &= -1 + \sqrt{3}i \\ z_{\vec{OC}} &= z_C - z_O = z_C = -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}\right\} z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OC}}$$

ومنه B صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{OC}$.

0,25 استنتاج أن الرباعي $OABC$ مربع:

بما أن $\vec{OC} = \vec{AB}$ و $OC = OA$ و $(\vec{OA}; \vec{OC}) = \frac{\pi}{2}$

فإن الرباعي $OABC$ مربع.

4) تعيين طبيعة المجموعة (S) التي تحقق $\text{Arg}\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$

$\text{Arg}\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ معناه $(\vec{MC}; \vec{MA}) = \pi + 2k\pi$ وعليه المجموعة (S) 0,5

هي القطعة $[AC]$ ماعدا النقطتين A و C.

حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=2e^{x}-ex-e$ حيث $D_g=\mathbb{R}$

1,5

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(2-\frac{ex}{e^{x}}-\frac{e}{e^{x}}\right)=+\infty$

حساب $g'(x)$:

من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{x}-e$

دراسة إشارة $g'(x)$: $g'(x)=0$ تكافئ $2e^{x}-e=0$ أي $e^{x}=\frac{e}{2}$ ومنه $x=\ln\frac{e}{2}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{e}{2}=1-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty,1-\ln2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln2;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		α		$1-\ln2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(\ln(2)-1)e=-0,83$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(1-\ln2)=\cancel{e}-e(1-\ln2)-\cancel{e}=(\ln(2)-1)e$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما ~~معدوم~~ 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$

0,25

لدينا $g(1)=2e-e-e=0$ ①

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,6;-0,58[$ و $g(-0,6)\times g(-0,58)<0$ لأن $\begin{cases} g(-0,6)=0,01 \\ g(-0,58)=-0,02 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة

0,5

القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$ ②

من ① و ② نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

0,5

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) $D_f = \mathbb{R}$ حيث $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$

١) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,25 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(-2 + \frac{1}{2}e\cancel{x^2e^{x}} - e\cancel{xe^{x}}\right)$

$= -\infty$

0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\cancel{\frac{-2}{x^2e^x}} + \frac{1}{2}e - \cancel{\frac{e}{x}}\right) = +\infty$

٢) أ) إثبات أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$

0,5

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 2e^{-x} + ex - e$

$= 2e^{-x} - e(-x) - e = g(-x)$

ب) استنتاج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[-1;-\alpha]$:

لدينا $f'(x)=0$ تكافئ $g(-x)=0$ أي $\begin{cases}-x=\alpha \\ -x=1\end{cases}$ أو ومنه $x=-\alpha$ أو $x=-1$

لدينا $g(-x)>0$ تكافئ $-x \in]-\infty,\alpha[\cup]1,+\infty[$

أي $x \in]-\infty,-1[\cup]-\alpha;+\infty[$

0,5

ومنه $g(-x)<0$ تكافئ $-x \in]\alpha;1[$ أي $x \in]-1;-\alpha[$

وعليه إشارة $f'(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-1;-\alpha[$ ومتزايدة على المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-\alpha;+\infty[$.

0,25

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$f(-1) = -2e + \frac{1}{2}e + e$
$= -e + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e$

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}e$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أحسب دون حساب : $\lim\limits_{x\to-\alpha} \dfrac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$

0,25 $\lim\limits_{x\to-\alpha} \dfrac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha} = f'(-\alpha) = g(\alpha) = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

0,25 نقول أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

4) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها :

لدينا $f'(x) = g(-x)$ ومنه $f''(x) = -g'(-x)$

لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $g'(-x) = 0$ أي $-x = 1-\ln 2$ أي $x = \ln(2)-1$

لدينا $f''(x) > 0$ تكافئ $-g'(-x) > 0$ أي $g'(-x) < 0$

ومنه $-x \in]-\infty, 1-\ln 2[$ ومنه $x \in]\ln(2)-1; +\infty[$

وعليه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي :

ملغى .

x	$-\infty$	$\ln(2)-1$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن f'' انعدمت من أجل $x = \ln(2)-1$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega(\ln(2)-1; f(\ln(2)-1))$ أي $\Omega\left(\ln(2)-1; \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2\right)$

لأن $f(\ln(2)-1) = -2e^{1-\ln 2} + \frac{1}{2}e(\ln(2)-1)^2 - e(\ln(2)-1)$

$= -e + \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln(2) + e$

$= \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2$

5) $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ / $D_h = \mathbb{R}$

0,25 أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x} = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

0,25 نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$.

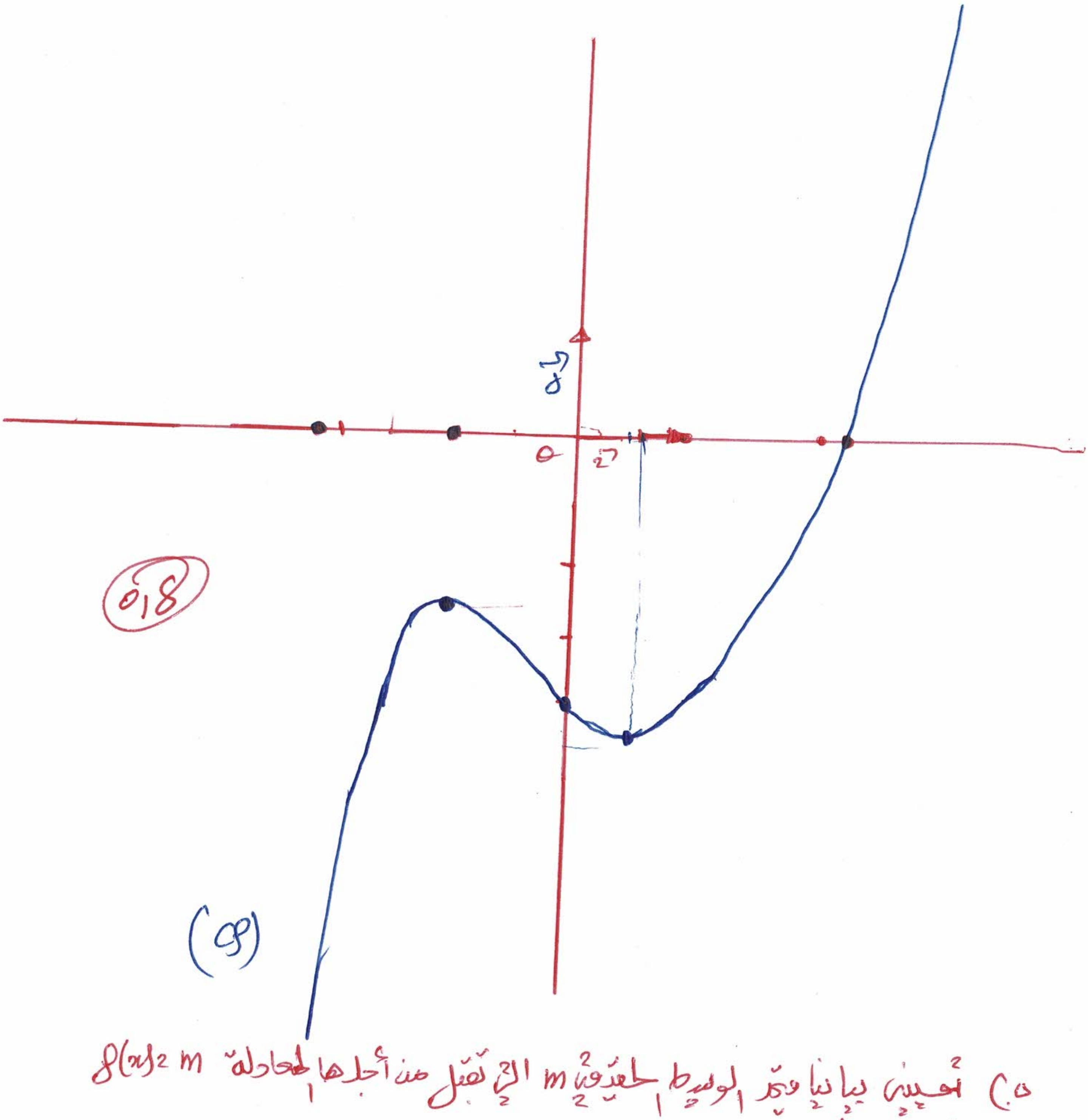
ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) :

0,5 بما أن $f(x)-h(x) = -2e^{-x} < 0$ فإن (C_f) تحت (C_h) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

5) أ) حساب $f(0)$ ثم رسم (C_f):

لدينا $f(0) = -2$

0,25



ب) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين وحل سالب:

لدينا من أجل $m \in]f(-\alpha) ; -2[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

0,25

الوثيقة المرفقة

اللقب:	الاسم: