الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المدية — ثانوية الطاهر بوكنة -أولاد إبراهيم-

إمتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي — دورة ماي 2022

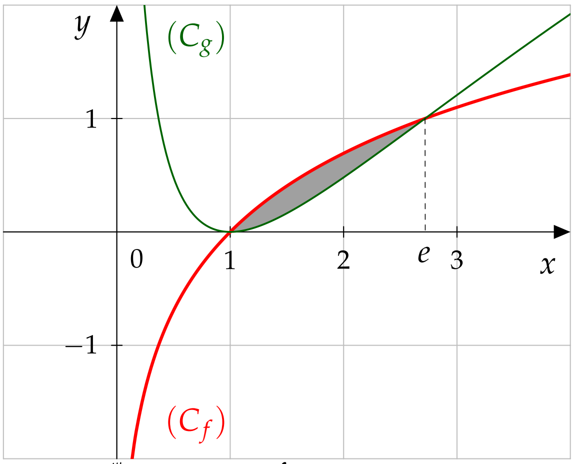
الشعبة : تقني رياضي

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :04 ساعة ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الأتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)



المنحنيين (C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين f و g على الترتيب ، المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \ln x$ و $g(x) = (\ln x)^2$ ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (انظر الشكل).

❶ نبحث عن المساحة A (بوحدة المساحة)، للحيز المستوي المظلّل ، نضع : $I = \int_1^e \ln x \, dx$ و $J = \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

أ) تحقق أن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $F(x) = x\ln x - x$ ، هي دالة أصلية للدالة اللّوغاريتم النيبيري، ثم استنتج قيمة العدد I.

ب) أثبت، باستعمال المكاملة بالتجزئة أن : $J = e - 2I$ ، ثم استنتج قيمة العدد J ، و مساحة الحيز A.

❷ x عدد حقيقي من المجال $[1;e]$، M و N نقطتيين من المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب ، لهما نفس الفاصلة x .

أثبت أن المسافة MN تكون أعظمية من أجل $x = \sqrt{e}$ ، ثم استنتج القيمة العظمى للمسافة MN .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.

❶ احسب u_1 و u_2 ، ثم خمن إتجاه تغير وطبيعة المتتالية (u_n).

❷ أ) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين نهايتها.

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n.

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$ ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❹ احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

و $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1)$

التمـرين الثالث: (04 نقاط)

❶ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة اللاإقليدية للعدد 9^n على 11

❷ بين أن $2021^{2023} \equiv 1[5]$ ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2022)^{2021^{2023}}$ على 11

❸ بين أن $1962^{1954} \equiv 3[11]$، ثم استنتج أن العدد $1 + 1962^{1954} + 1443^{2022} + 2022^{1443}$ مضاعف للعدد 11

❹ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $9^{2020n+2022} + 5 \times 9^{10n-2} + 3 \equiv 0[11]$

❺ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي $1962^{1954} + n^2 - 4$ مضاعف للعدد 11 .

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 + x - x\ln x$

❶ أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم تحقق أن : $3.5 < \alpha < 3.6$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{2\ln x}{1+x^2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. (الوحدة $2cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

❷ أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدل تغيراتها.

❸ بين أن : $f\left(\sqrt{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❺ أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f).

❻ نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بـ : $y = mx - m$ ، حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المسقيمات (Δ_m) تمر من نقطة الثابتة $A(1;0)$

ب) ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x) = \dfrac{\ln(x)^2}{1+x^2}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

❶ بين أن الدالة h زوجية.

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه .

إنتهى المـوضـوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، حدده مع التبرير.

❶ المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_n = \ln(16^n) - \ln(2^{n+1})$ ، المتتالية (u_n) :

أ) حسابية　　ب) هندسية　　ج) لاحسابة ولا هندسية

❷ القيمة المتوسطة μ للدالة $f : x \mapsto 2^{x-1}$ على المجال $[1;2]$ هي :

أ) $\dfrac{3}{\ln 2}$　　ب) $\dfrac{1}{\ln 2}$　　ج) $\ln 2$

❸ المنحنى البياني للدالة $f : x \mapsto \ln(2x+1)$ هو صورة منحنى الدالة اللوغاريتم النيبيري ، بالإنسحاب الذي شعاعه :

أ) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \ln 2 \end{pmatrix}$　　ب) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\ln 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　ج) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \ln 2 \end{pmatrix}$

❹ نعتبر المعادلة التفاضلية $y' + y - 2 = 0$ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق $y(0) = 4$ هو :

أ) $y = 2(e^{-x} - 1)$　　ب) $y = 2(e^{-x} + 1)$　　ج) $y = -2e^{-x} + 1$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر العدد a_n المعرف بـ : $a_n = 2 \times 5^n + 7$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

❶ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد a_n فردي.

ب) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n \equiv 1[8]$

❷ أ) نعتبر في $\mathbb{N}$ الجملة : $(S) : \begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 7\,[125] \end{cases}$ ، بين أن : $x \equiv 257[1000]$

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي $n \geq 3$: $a_n \equiv 257[1000]$

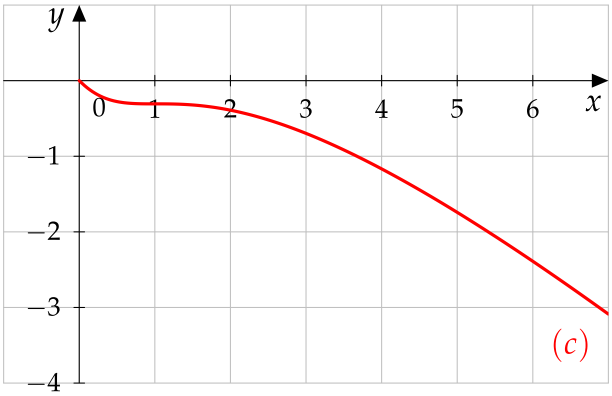
ج) ماهي الأرقام الثلاثة الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2022} + 7)$ ؟

❸ أ) تحقق أنه من أجل عدد طبيعي n: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب) بين أن القاسم المشترك الأكبر للعددين a_{2n} و a_{2n+1} ، يختلف عن 7

ج) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a_{2n}\,;\,a_{2n+1})$.

التمـرين الثالث: (05 نقاط)



f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (انظر الشكل).

(C) يقطع حامل محور الفواصل فقط عند المبدأ O.

❶ بقراءة بيانية، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\ln(1+x^2) \leq x$

❷ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+{u_n}^2)$

أ) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

د) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

❸ نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة كما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) بين أن المتتالية (S_n) متزايدة.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ج) استنتج أن المتتالية (S_n) متقاربة.

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

❶ أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2-x)e^x - x$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

❸ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدل تغيراتها.

❹ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.6 < \alpha < 1.7$

❺ بين أن النقطة $A(0;2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

❻ بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب كتابة معادلة له.

❼ أنشئ كل من (Δ) ،(T) والمنحنى (C_f) .

❽ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $me^{-x} + x - 2 = 0$

❾ أ) بين باستعمال المكاملة بالتجزئة أن : $\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = -1$ ، $x = 0$ و $y = -x$

<u>إنتهى المــوضــوع الثاني</u>

بالتوفيق في بكالوريا 2022

✍ يمكنكم الاطلاع على التصحيح النموذجي للموضوعين، وذلك بمسح رمزالاستجابة السريعة QR Code أسفله