الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المدية — ثانوية الطاهر بوكنة -أولاد إبراهيم-

إمتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي — دورة ماي 2022

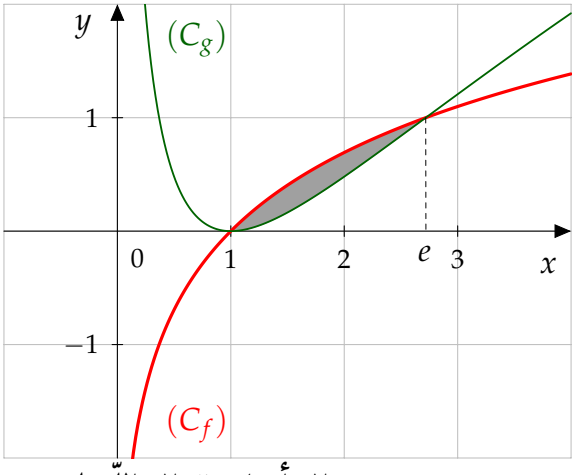
الشعبة : تقني رياضي

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :04 ساعة ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الأتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)



المنحنيين (C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين f و g على الترتيب ، المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\ln x$ و $g(x)=(\ln x)^2$ ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (انظر الشكل).

❶ نبحث عن المساحة A (بوحدة المساحة)، للحيز المستوي المظلّل ، نضع : $I=\int_1^e \ln x\,dx$ و $J=\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

أ) تحقق أن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $F(x)=x\ln x-x$ ، هي دالة أصلية للدالة اللّوغاريتم النيبيري، ثم استنتج قيمة العدد I.

ب) أثبت، باستعمال المكاملة بالتجزئة أن : $J=e-2I$ ، ثم استنتج قيمة العدد J ، و مساحة الحيز A.

❷ x عدد حقيقي من المجال $[1;e]$، M و N نقطتين من المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب ، لهما نفس الفاصلة x .

أثبت أن المسافة MN تكون أعظمية من أجل $x=\sqrt{e}$ ، ثم استنتج القيمة العظمى للمسافة MN .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$.

❶ احسب u_1 و u_2 ، ثم خمن إتجاه تغير وطبيعة المتتالية (u_n).

❷ أ) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<2$

ب)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين نهايتها.

❸ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n.

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$ ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❹ احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

و $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1)$

التمـرين الثالث: (04 نقاط)

❶ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة اللاإقليدية للعدد 9^n على 11

❷ بين أن $2021^{2023} \equiv 1[5]$ ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2022)^{2021^{2023}}$ على 11

❸ بين أن $1962^{1954} \equiv 3[11]$، ثم استنتج أن العدد $2022^{1443} + 1443^{2022} + 1962^{1954} + 1$ مضاعف للعدد 11

❹ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $9^{2020n+2022} + 5 \times 9^{10n-2} + 3 \equiv 0[11]$

❺ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد الطبيعي $1962^{1954} + n^2 - 4$ مضاعف للعدد 11 .

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 + x - x\ln x$

❶ أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

❷ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم تحقق أن : $3.5 < \alpha < 3.6$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{2\ln x}{1+x^2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الوحدة $2cm$)

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

❷ أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدل تغيراتها.

❸ بين أن : $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$

❹ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

❺ أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f).

❻ نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بـ : $y = mx - m$ ، حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المسقيمات (Δ_m) تمر من نقطة الثابتة $A(1;0)$

ب) ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) والمنحنى (C_f).

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $h(x) = \dfrac{\ln(x)^2}{1+x^2}$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

❶ بين أن الدالة h زوجية.

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه .

إنتهى المــوضــوع الأول

المـوضـوع الثاني

التمـرين الأول: (03 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، حدده مع التبرير.

❶ المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_n = \ln(16^n) - \ln(2^{n+1})$ ، المتتالية (u_n) :

أ) حسابسة ب) هندسية ج) لاحسابسة ولا هندسية

❷ القيمة المتوسطة μ للدالة $f : x \mapsto 2^{x-1}$ على المجال $[1;2]$ هي :

أ) $\frac{3}{\ln 2}$ ب) $\frac{1}{\ln 2}$ ج) $\ln 2$

❸ المنحنى البياني للدالة $f : x \mapsto \ln(2x+1)$ هو صورة منحنى الدالة اللوغاريتم النيبيري ، بالإنحساب الذي شعاعه :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \ln 2\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\ln 2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \ln 2\end{pmatrix}$

❹ نعتبر المعادلة التفاضلية $y' + y - 2 = 0$ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق $y(0) = 4$ هو :

أ) $y = 2(e^{-x} - 1)$ ب) $y = 2(e^{-x} + 1)$ ج) $y = -2e^{-x} + 1$

التمـرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر العدد a_n المعرف بـ : $a_n = 2 \times 5^n + 7$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

❶ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد a_n فردي.

ب) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n \equiv 1[8]$

❷ أ) نعتبر في $\mathbb{N}$ الجملة : $(S) : \begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 7\,[125] \end{cases}$ ، بين أن : $x \equiv 257[1000]$

ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي $n \geq 3$: $a_n \equiv 257[1000]$

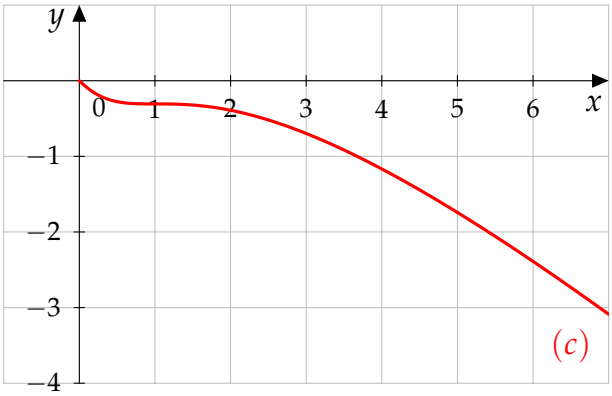
ج) ماهي الأرقام الثلاثة الأخيرة للعدد $(2 \times 5^{2022} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$ ؟

❸ أ) تحقق أنه من أجل عدد طبيعي n: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب) بين أن القاسم المشترك الأكبر للعددين a_{2n} و a_{2n+1} ، يختلف عن 7

ج) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a_{2n}\,;\,a_{2n+1})$.

التمـرين الثالث: (05 نقاط)



f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (انظر الشكل).

(C) يقطع حامل محور الفواصل فقط عند المبدأ O.

❶ بقراءة بيانية، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\ln(1+x^2) \leq x$

❷ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = \frac{3}{2}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n{}^2)$

أ) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ج) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

❸ نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة كما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ) بين أن المتتالية (S_n) متزايدة.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج) استنتج أن المتتالية (S_n) متقاربة.

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

❶ أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ استنتج من أجل كل عدد حقيقي x ، إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2-x)e^x - x$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❷ أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

❸ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدل تغيراتها.

❹ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.6<\alpha<1.7$

❺ بين أن النقطة $A(0;2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

❻ بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب كتابة معادلة له.

❼ أنشئ كل من (Δ) ،(T) والمنحنى (C_f) .

❽ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $me^{-x}+x-2=0$

❾ أ) بين باستعمال المكاملة بالتجزئة أن : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx=3-\frac{4}{e}$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=-1$ ، $x=0$ و $y=-x$

إنتهى المـوضـوع الثاني

بالتوفيق في بكالوريا 2022

✍ يمكنكم الاطلاع على التصحيح النموذجي للموضوعين، وذلك بمسح رمزالاستجابة السريعة QR Code أسفله

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

① أ) التحقق أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة "Ln":

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا:

$$F'(x) = \ln x + \frac{1}{x}\times x - 1$$
$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

وعليه الدالة F هي دالة أصلية لـ "Ln".

* استنتاج قيمة العدد I:

$$I = \int_1^e \ln x\,dx = [F(x)]_1^e$$
$$= F(e) - F(1)$$
$$= e\ln e - e - (\ln 1 - 1)$$
$$= e - e + 1 = 1$$

إذن: $I = 1$

ب) إثبات أن: $J = e - 2I$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

بوضع: $u(x) = g(x) = (\ln x)^2$ ، $v'(x) = 1$

نجد: $u'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ ، $v(x) = x$

وعليه:

$$J = \int_1^e (\ln x)^2\,dx$$
$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\times\frac{2\ln x}{x}\,dx$$
$$= e - 2\int_1^e \ln x\,dx$$
$$= e - 2I$$

أي: $J = e - 2I$

* مساحة الحيز A:

$$A = \int_1^e [f(x) - g(x)]\,dx$$
$$= \int_1^e [\ln x - (\ln x)^2]\,dx$$
$$= \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e (\ln x)^2\,dx$$
$$= I - J = 1 - (e-2) = 3 - e$$

أي: $J = 3 - e$ (ua)

② إثبات أن المسافة MN تكون أعظمية من أجل: $x = \sqrt{e}$

نضع من أجل كل x من $[1;e]$:

$$d(x) = MN = f(x) - g(x)$$
$$= \ln x - (\ln x)^2$$

نلاحظ أن الدالة d (المسافة) تقبل قيمة حدية عظمى (يمكن إثبات ذلك بدراسة تغيرات الدالة d).

الدالة d قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ومن أجل كل x من $[1;e]$ لدينا:

$$d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= \frac{1 - 2\ln x}{x}$$

ولدينا: $d'(x) = 0$ معناه $1 - 2\ln x = 0$

ومنه: $\ln x = \frac{1}{2}$ أي $x = e^{\frac{1}{2}}$

أي: $x = \sqrt{e}$

إذن المسافة MN (الدالة d) تكون أعظمية من أجل $x = \sqrt{e}$.

* استنتاج القيمة العظمى للمسافة MN:

لدينا: $d(\sqrt{e}) = \ln\sqrt{e} - (\ln\sqrt{e})^2$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

إذن القيمة العظمى للمسافة MN هي $\frac{1}{4}$

Scanné avec CamSca

التمرين الثاني:

① $u_1 = 1+\sqrt{u_0-1} = 1+\sqrt{\frac{3}{2}-1} =$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$u_2 = 1+\sqrt{u_1-1} = 1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$

$= 1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

التخمين: $u_0 < u_1 < u_2$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة، وهي متقاربة.

② أ) البرهان بالتراجع: $1 < u_n < 2$

* من أجل $n=0$: $1 < u_0 < 2$ (محققة).

* نفرض أن: $1 < u_n < 2$، ونبرهن أن: $1 < u_{n+1} < 2$

من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 2$

ومنه: $0 < u_n - 1 < 1$

ومنه: $0 < \sqrt{u_n-1} < 1$

ومنه: $1 < 1+\sqrt{u_n-1} < 2$

أي: $1 < u_{n+1} < 2$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 2$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} - u_n = 1+\sqrt{u_n-1} - u_n$

$= \sqrt{u_n-1} - (u_n-1)$

$= \frac{\sqrt{u_n-1}^2 - (u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$

$= \frac{u_n-1-(u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

$= \frac{(u_n-1)(1-(u_n-1))}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

$= \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

* استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_n - 1 > 0$; $2-u_n > 0$

ومنه، $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى $(u_n < 2)$ فإنها متقاربة.

* تعيين النهاية:

لتكن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

ومنه، $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

ومنه: $1+\sqrt{\ell-1} = \ell$

ومنه، $\sqrt{\ell-1} = \ell-1$

أي $\ell-1=1$ أي $\ell=2$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

③ أ) تبيين أن (v_n) متتالية هندسية:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln(1+\sqrt{u_n-1}-1)$

$= \ln(\sqrt{u_n-1}) = \frac{1}{2}\ln(u_n-1)$

$= \frac{1}{2} v_n$

وعليه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -\ln 2$

ب) كتابة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = v_0 \times q^n$

ومنه $v_n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

أو، $= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Scanné avec CamSca

إستنتاج أن : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_n = \ln(u_n - 1)$

ومنه : $u_n - 1 = e^{v_n}$

ومنه : $u_n = e^{v_n} + 1$

$= e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$

$= e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} + 1$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1$

حساب النهاية : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

لأن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

④ حساب المجموع S_n :

$S_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

$= -2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

حساب الجداء P_n :

$P_n = (u_0-1)(u_1-1)\times \cdots \times (u_n-1)$

$= e^{v_0}\times e^{v_1}\times \cdots \times e^{v_n}$

$= e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}$

$= e^{S_n}$

$= 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}$

التمرين الثالث :

① دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 من أجل كل عدد $n\in\mathbb{N}$ ؟

لدينا : $9^2 \equiv 1[11]$ ، $9 \equiv 9[11]$

$9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 4[11]$

$9^5 \equiv 1[11]$ ، $9^n \equiv 5[11]$

نلخص بواقي القسمة الاقليدية في الجدول التالي :

$n =$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k\in\mathbb{N}$
$9^n \equiv$	1	9	4	3	5	[11]

② تعيين أن : $2021^{2023} \equiv 1[5]$

لدينا : $2021 \equiv 1[5]$ ومنه $2021^{2023} \equiv 1[5]$

إستنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد $2022^{2021^{2023}}$ على 11 :

لدينا : $2021^{2023} \equiv 1[5]$ ، عليه $\exists$ عدد صحيح K

بحيث : $2021^{2023} = 5K+1$

لدينا : $2022 \equiv 9[11]$

ومنه : $2022^{2021^{2023}} \equiv 9^{2021^{2023}}[11]$

ومنه : $2022^{2021^{2023}} \equiv 9^{5K+1}[11]$

إذن : $2022^{2021^{2023}} \equiv 9[11]$

وعليه باقي قسمة العدد $2022^{2021^{2023}}$ على 11 هو 9 .

③ تبيين أن : $1962^{1954} \equiv 3[11]$.

لدينا : $1962 \equiv 4[11]$

$1962 \equiv (2)^2[11]$ ومنه ، $1962 \equiv (-9)^2[11]$ ومنه ،

ونعلم أن : $1954 = 5(390)+4$

وبالتالي : $1962^{1954} \equiv (9^2)^{1954}[11]$

ومنه : $\equiv 9^{5(780)+8}[11]$

$\equiv 9^{5(781)+3}[11]$

$\equiv 3[11]$

* إستنتاج باقي العدد $2022^{1443} + 1443^{2022} + 1962^{1954} + 1$ على 11 :

مصاحف العدد 11 :

$2022^{1443} + 1443^{2022} + 1962^{1954} + 1 \equiv 9^{5(288)+3} + 2^{2022} + 3 + 1[11]$

$\equiv 3 + (-9)^{2022} + 4[11]$

$\equiv 9^{5(404)+2} + 7[11]$

$\equiv 4 + 7[11]$

$\equiv 0[11]$

وهو المطلوب .

Scanné avec CamSca

④ تبيين أن: $9^{2020n+2022} + 5\times 9^{10n-2} + 3 \equiv 0[11]$

لدينا: $2020n+2022 = 2020(n+1)+2$

$= 5(404(n+1))+2$

و: $10n-2 = 10n-2+5-5$

$= 5(2n-1)+3$

إذن: $9^{2020n+2022} + 5\times 9^{10n-2} + 3 \equiv 9^{2}+5\times 9^{1}+3$

$\equiv 4+5\times 3+3\ [11]$

$\equiv 22\ [11]$

$\equiv 0\ [11]$

⑤ تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $1962^{1954}+n^2-4$ مضاعف لـ 11:

$1962^{1954}+n^2-4 \equiv 0[11]$ معناه $1962^{1954}+n^2-4$ مضاعف لـ 11

لدينا: $1962^{1954}+n^2-4 \equiv 3+n^2-4\ [11]$

$\equiv n^2-1\ [11]$

إذن $n^2-1 \equiv 0[11]$ أي $n^2 \equiv 1[11]$

طريقة 1:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 [11]
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1 [11]

إذن $n \equiv 1[11]$ أو $n \equiv 10[11]$

طريقة 2: $n^2-1 \equiv 0[11]$ معناه $(n-1)(n+1) \equiv 0[11]$

ومنه $n-1 \equiv 0[11]$ أو $n+1 \equiv 0[11]$

ومنه $n \equiv 1[11]$ أو $n \equiv -1[11]$

أي $n \equiv 10[11]$

التمرين الرابع:

I) ① دراسة تغيرات الدالة g.

$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ ، $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$:

$g'(x) = 1-(\ln x + \frac{1}{x}\times x) = -\ln x$

نلخص إشارة $g'(x)$ في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−	

وعليه الدالة g متزايدة تماما على $]0;1]$ ، ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

* جدول التغيرات:

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	0	−		−	
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

② الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $0 \in]-\infty,2]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in [1;+\infty[$

وبما أن $[1;+\infty[\subset]0;+\infty[$ فإن $\alpha \in]0;+\infty[$

* التحقق أن: $3,5 < \alpha < 3,6$

بما أن $[3,5;3,6] \subset]0,+\infty[$ و $g(3,5)\times g(3,6) < 0$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3,5;3,6[$

③ استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	−	

Scanné avec CamSca

1) أ/ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\left(\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

و: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

التفسير الهندسي:

* المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (محور الفواصل) مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
* المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) نحو $-\infty$.

2) أ/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$، ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2\left(\frac{\frac{1}{x}\times(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2x\left(\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x\right)}{x(1+x^2)^2}$$

$$= 2\left(\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1+x^2-x^2\ln x^2}{x(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

ب/ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$:

* $g(x^2)=0$ معناه $x^2=\alpha$ أي $x=\sqrt{\alpha}$
* $g(x^2)>0$ معناه $x^2\in]0;\alpha[$ أي $x\in]0;\sqrt{\alpha}[$
* $g(x^2)<0$ معناه: $x^2\in]\alpha;+\infty[$ أي $x\in]\sqrt{\alpha};+\infty[$

يمكن تلخيص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على $]0,\sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha};+\infty[$.

* جدول التغيرات:

x	0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\sqrt{\alpha})$	↘	0

3) تبيين أن: $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

لدينا: $g(\alpha)=0$

ومنه: $1+\alpha-\alpha\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha = \frac{1+\alpha}{\alpha}$

ولدينا: $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\ln\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}^2} = \frac{\ln(\sqrt{\alpha})^2}{1+\sqrt{\alpha}^2}$

$$= \frac{\ln\alpha}{1+\alpha} = \frac{\frac{1+\alpha}{\alpha}}{1+\alpha} = \frac{1+\alpha}{\alpha}\times\frac{1}{1+\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}$$

أي: $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(1)=0$, $f'(1)=1$

ومنه: $(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$$= (x-1)+0 = x-1$$

أي: $(T): y = x-1$

5) إنشاء المماس (T) والمنحنى (C_f):

6) أ/ تبيين أن جميع المستقيمات (D_m) تمر من $A(1;0)$:

لدينا: $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m-m$

أي $0=0$ (محققة).

وعليه $A\in(D_m)$، إذن المستقيمات (D_m) تمر من النقطة A.

ب/ مناقشة بيانيا عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) والمنحنى (C_f):

Scanné avec CamSca

نقط تقاطع المستقيمات (Δ_m) و (C_f) ، فواصلها هي حلول المعادلة $f(x)=y$

أي $f(x)=mx-m$

وبالتالي :

- $m\in]-\infty;0]$: المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1 أي تتقاطع (Δ_m) و (C_f) في النقطة A
- $m\in]0,1[$: المعادلة تقبل حلين أحدهما 1 ، أي يتقاطع (Δ_m) و (C_f) في نقطتين إحداهما النقطة A ونقطة أخرى .
- $m=1$: المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1 وعليه (Δ_m) و (C_f) يتطابقان في A .
- $m\in]1,+\infty[$: المعادلة تقبل حلين أحدهما 1 وعليه (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في النقطة A ونقطة أخرى .

III) ① بين أن h زوجية :

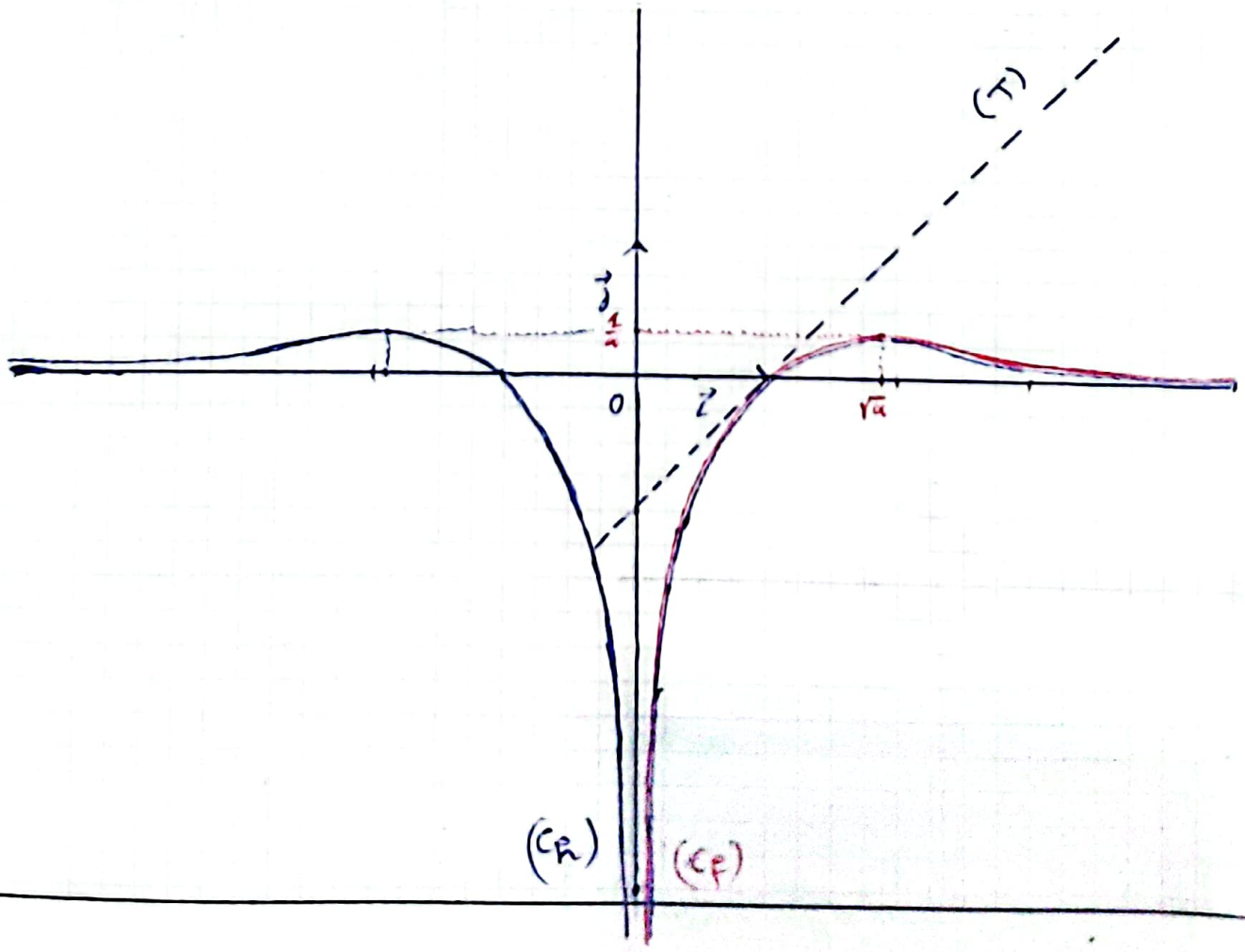
$\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر ومن أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$h(-x)=\frac{\ln(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{\ln x^2}{1+x^2}=h(x)$$

إذن الدالة h زوجية .

② نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $h(x)=f(x)$

وعليه (C_h) هو نفسه (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ وبما أن h زوجية، نكمل إنشاء (C_h) على $]-\infty,0[$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .



Scanné avec CamSca

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

① الإجابة: صحيحة.

التعليل: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \ln 16^n - \ln(2^{n+1})$$
$$= \ln(2^{4n}) - \ln(2^{n+1})$$
$$= 4n\ln 2 - (n+1)\ln 2$$
$$= (3n-1)\ln 2$$

إذن المتتالية (u_n) معرفة بعبارة الحد العام لمتتالية حسابية أساسها $r = 3\ln 2$ وحدها الأول $u_0 = -\ln 2$.

② الإجابة: $\frac{1}{\ln 2}$.

التعليل: الدالة f مستمرة على $[1,2]$ وعليه:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2-1}\int_1^2 2^{x-1}\,dx = \int_1^2 e^{(x-1)\ln 2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{\ln 2}e^{(x-1)\ln 2}\right]_1^2 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}$$

③ الإجابة: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \ln 2 \end{pmatrix}$.

التعليل:

$$f(x) = \ln(2x+1)$$
$$= \ln\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \ln 2 + \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

وعليه الخط (C_f) هو صورة الدالة $\ln$ بالانسحاب الشعاعي $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \ln 2 \end{pmatrix}$

④ الإجابة: $y = 2(e^{-x}+1)$

التعليل: حلول المعادلة $y' + y - 2 = 0$ $(y' = -y+2)$ هي الدوال من الشكل $y = ce^{-x} - \frac{2}{-1}$ أي $y = ce^{-x} + 2$

ولدينا $y(0) = 4$ معناه $ce^0 + 2 = 4$

أي $c = 2$

وعليه الحل الخاص هو $y = 2e^{-x} + 2$

أي $y = 2(e^{-x}+1)$

التمرين الثاني:

① أ/ التحقق أن a_n فردي:

(a_n فردي معناه $a_n \equiv 1[2]$)

لدينا $5 \equiv 1[2]$ ومنه $5^n \equiv 1[2]$

ومنه $2\times 5^n \equiv 2[2]$ أي $2\times 5^n \equiv 0[2]$

ولدينا $7 \equiv 1[2]$

وعليه $2\times 5^n + 7 \equiv 1[2]$

أي $a_n \equiv 1[2]$.

إذن a_n فردي.

ب/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8:

لدينا $5^2 \equiv 1[8]$ ، $5^3 \equiv 5[8]$

$5^2 \equiv 1[8]$ ، نلخص البواقي في الجدول التالي:

$n =$	$2k$	$2k+1$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	[8]

ج/ استنتاج أن: $a_n \equiv 1[8]$

• من أجل $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$:

$5^n \equiv 1[8]$ ومنه $2\times 5^n \equiv 2[8]$

ومنه $2\times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ أي $a_n \equiv 1[8]$

• من أجل $n = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$:

$5^n \equiv 5[8]$ ومنه $2\times 5^n \equiv 10[8]$

ومنه $2\times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ أي $a_n \equiv 1[8]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n \equiv 1[8]$

② النسق $(S): \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ يكافئ: $x \equiv 257[1000]$

Scanné avec CamSca

لدينا: $\begin{cases} x-257 \equiv 256[8] \\ x-257 \equiv 250[125] \end{cases}$ ، $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ ومنه

وبما أن $PGCD(8,125)=1$ ، $\begin{cases} x-257 \equiv 0[8] \\ x-257 \equiv 0[125] \end{cases}$ ومنه

فإن $x-257 \equiv 0[8\times125]$

ومنه $x \equiv 257[1000]$

(يمكن إستعمال طريقة أخرى).

ب/ إستنتاج أن $a_n \equiv 257[1000]$ ، $(n \geq 3)$:

مما سبق لدينا: $a_n \equiv 1[8]$ ... (1)

ولدينا $5^n \equiv 0[125]$ ، $2\times5^n+7 \equiv 7[125]$ ومنه

أي $a_n \equiv 7[125]$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن a_n حل لـ (S)

ومنه: $a_n \equiv 257[1000]$

ج/ نلاحظ أن:

$(2\times5^{2022}+7)(2\times5^{2021}+7) = a_{2022}\times a_{2021}$

ومنه: $a_{2022}\times a_{2021} \equiv 257^2[1000]$

$\equiv 66049[1000]$

$\equiv 49[1000]$

وعليه آخر ثلاثة أرقام هي 049

الآحاد 9، العشرات 4، المئات 0.

③ أ/ التحقق من $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$ ، $n\in\mathbb{N}$:

لدينا: $5a_{2n}-a_{2n+1} = 5(2\times5^{2n}+7)-(2\times5^{2n+1}+7)$

$= 10\times5^{2n}+35-10\times5^{2n}-7$

$= 28$

ب/ نستنتج أن $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})$ تختلف عن 7:

نضع: $d = PGCD(a_{2n};a_{2n+1})$.

(نستعمل البرهان بالخلف):

نفرض أن $d=7$ وعليه $7 \mid a_{2n}$

أي $2\times5^{2n}+7 \equiv 0[7]$ ، $a_{2n} \equiv 0[7]$

ومنه $2\times5^n \equiv 0[7]$

وبما أن $PGCD(2,7)=1$ فإن $5^n \equiv 0[7]$

(تناقض).

ومنه $PGCD(a_{2n};a_{2n+1}) \neq 7$.

ج/ إستنتاج القيم الممكنة لـ d.

لدينا: $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})=d$

ومنه $d \mid a_{2n}$ ، $d \mid a_{2n+1}$

ومنه $d \mid 5a_{2n}-a_{2n+1}$ أي $d \mid 28$

ومنه $d \in D_{28} = \{1,2,4,7,14,28\}$

وبما أن $d \neq 7$ فإن d تختلف عن 14

و 28 (تختلف عن مضاعفات 7)

ومن جهة أخرى a_n فردي فإن

d تختلف عن 2 و 4

وبالتالي نستنتج أن $d=1$

أي $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})=1$.

التمرين الثالث:

① تبيين أنه من أجل كل x من $[0,+\infty[$:

$\ln(1+x^2) \leq x$

نعرف دالة بـ: f ، نلاحظ أن من أجل كل

x من $[0,+\infty[$: $f(x) \leq 0$

ومنه $-2x+\ln(1+x^2) \leq 0$ أي $\ln(1+x^2) \leq x$

② أ/ البرهان بالتراجع: $u_n>0$.

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0>0$

نفرض أن $u_n>0$ ونبرهن أن $u_{n+1}>0$

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

ومنه $u_n^2>0$ ، $1+u_n^2>1$

Scanné avec CamSca

ومنه $\ln(1+u_n^2) > 0$

ومنه $\frac{1}{2}\ln(1+u_n^2) > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$.

ب/ تبيين أن: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

وحسب السؤال الأول نجد:

$\ln(1+u_n^2) \leq u_n$

ومنه: $\frac{1}{2}\ln(1+u_n^2) \leq \frac{1}{2}u_n$

ومنه: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ج/ استنتاج أن: $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا:

$$\begin{cases} u_1 \leq \frac{1}{2}u_0 \\ u_2 \leq \frac{1}{2}u_1 \\ \vdots \\ u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1} \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

ومنه: $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د/ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$

أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

وعليه المتتالية (u_n) متناقصة، ومحدودة من الأسفل $(u_n > 0)$ فهي متقاربة.

* حساب نهاية (u_n):

من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

③ أ/ تبيين أن (S_n) متتالية متزايدة:

لدينا: $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$

ومنه المتتالية (S_n) متزايدة.

ب/ تبيين أن: $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

من السؤال 2-ج- لدينا:

$$\begin{cases} u_0 \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ u_1 \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ \vdots \\ u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد:

$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ومنه: $S_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

ومنه: $S_n \leq 3\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

أي: $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج/ بما أن المتتالية (S_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى $(S_n \leq 3)$ فإنها متقاربة.

التمرين السابع:

① دراسة تغيرات الدالة g:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-x)$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$، ومتناقصة تماما على $[0, +\infty[$.

Scanné avec CamSca

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

② إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) < 0$ و $g(0)=0$

II : ① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x$

$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2-x-\frac{x}{e^x}\right) = -\infty$

لأن : $\lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

② أ/ : بما أن $\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب/ : دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ السابق :

$f(x) - y = (2-x)e^x$

إشارة $f(x)-y$ من إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(2,-2)$	(C_f) تحت (Δ)	

③ أ/ : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1$

$f'(x) = (1-x)e^x - 1 = g(x)$

ب/ : استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعليه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

④ تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1,6 < \alpha < 1,7$.

الدالة f معرفة مستمرة، ومتناقصة تماما على $[1,6;1,7]$ ولدينا : $f(1,7)\times f(1,6) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,6 < \alpha < 1,7$

وعليه المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

⑤ تبيين أن $A(0,2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) :

الدالة المشتقة f' للدالة f تنعدم عند 0 ولا تغير إشارتها وعليه المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف عند النقطة ذات الفاصلة 0 أي $A(0,2)$

Scanné avec CamSca

ج) تبين أنه يوجد مماس (T) لـ (Cf) يوازي المستقيم (Δ):

(T) // (Δ) معناه: $f'(x) = -1$

ومنه: $g(x) = -1$

ومنه: $(1-x)e^x - 1 = -1$

ومنه: $(1-x)e^x = 0$

ومنه: $1-x=0$ لأن $e^x \neq 0$

ومنه: $x = 1$.

إذن يوجد مماس (T) لـ (Cf) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1،

ومعادلته هي:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= -1(x-1) + e - 1$$
$$= -x + e$$

أي $(T): y = -x + e$

7) إنشاء (Δ)، (T)، وكذا (Cf)

8) مناقشة بيانيا حلول المعادلة

$$me^{-x} + x - 2 = 0$$

لدينا: $me^{-x} + x - 2 = 0$

معناه: $x - 2 = -me^{-x}$

ومنه: $(2-x)e^x = me^{-x} \times e^x$

ومنه: $(2-x)e^x - x = -x + m$

أي: $f(x) = -x + m$

حلول المعادلة $f(x) = -x + m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (Cf) والمستقيم ذو المعادلة $(\Delta_m): y = -x + m$

(Δ_m) ينطبق على (Δ) معناه $m = 0$

(Δ_m) ينطبق على (T) معناه: $m = e$

- $m \in]-\infty; 0[$: المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m \in [0; e[$: " تقبل حلين
- $m = e$: المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m \in]e; +\infty[$: " لا تقبل حلولا.

9) أ/ بو ضح:

$u(x) = 2 - x$ ، $v'(x) = e^x$

$u'(x) = -1$ ، $v(x) = e^x$

$$\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = \left[(2-x)e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -1 \times e^x dx$$
$$= 2 - 3e^{-1} + \left[e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$= 2 - 3e^{-1} + 1 - e^{-1}$$
$$= 3 - 4e^{-1} = 3 - \frac{4}{e}$$

ب/ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (Cf) والمستقيمات: $x = -1$ ، $x = 0$ و $y = -x$

من أجل كل x من $[-1, 0]$ لدينا:

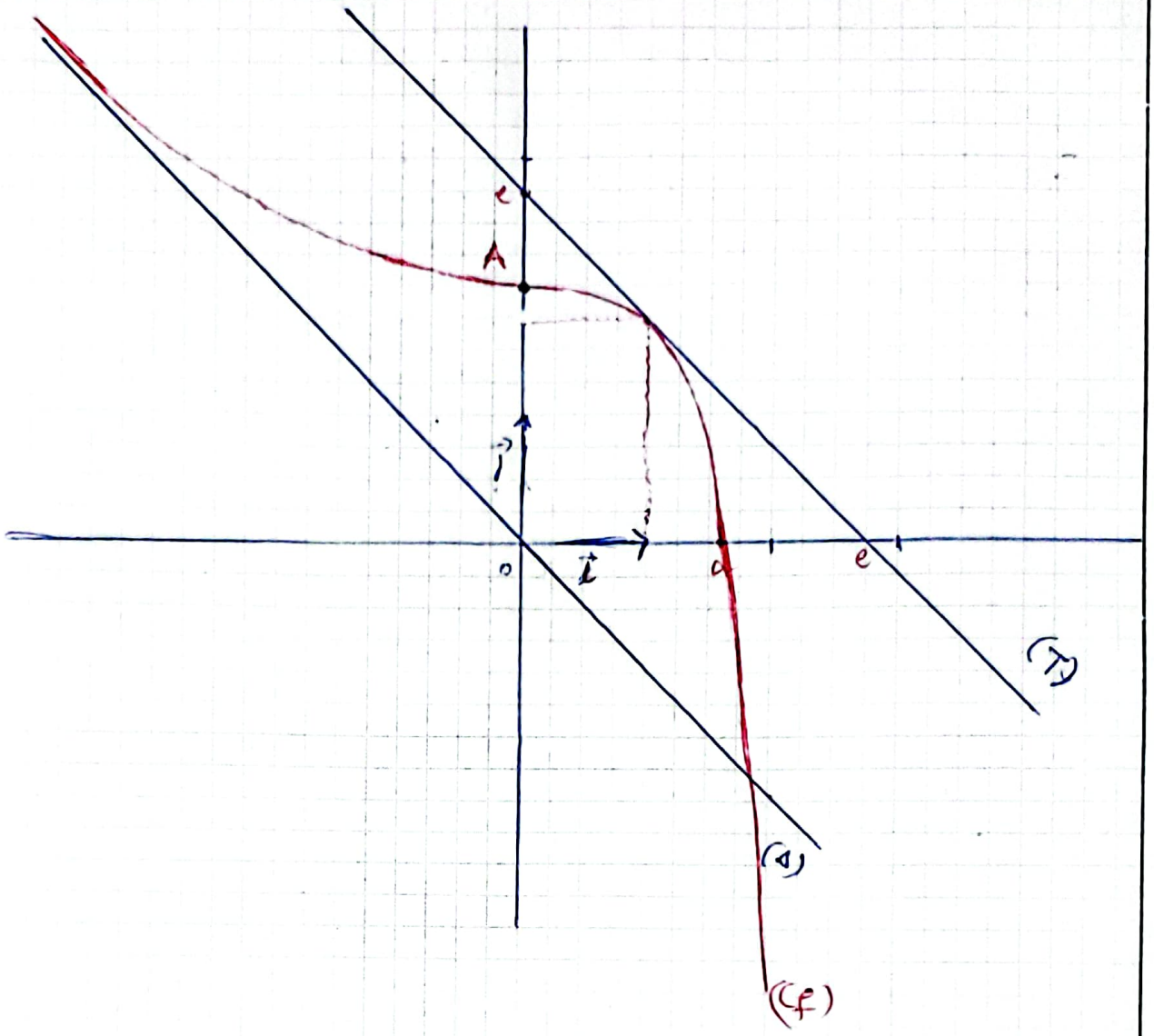
$$f(x) > -x$$

ومنه:

$$S = \int_{-1}^{0} [f(x) - (-x)] dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

والله أعلم

Scanné avec CamSca



Scanné avec CamSca