الشعبة : علوم تجريبية | إختبار في مادة الرياضيات | دورة 2022

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل مرة :

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+5}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

☜ المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ هو محور التناظر لــ (C) .

2) a عدد طبيعي حيث : $a=5^6\times 25^{1443}$ ، عدد أرقام العدد a هو : 2022 .

3) المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{7}$ ، حدها الأول v_0 و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_0+v_1+....+v_n\right)=2289$ إذن : $v_0=1962$.

4) لاختبار أحد الطلبة وضع أستاذ الرياضيات في علبة خمسة أسئلة في الدوال و أربعة أسئلة في الإحتمالات وثلاثة أسئلة في المتتاليات ، على الطالب أن يسحب عشوائيا سؤالا ثلاث مرات على التوالي دون إرجاع .

☜ احتمال أن يسحب الطالب سؤال في الدوال وسؤال في الإحتمالات وسؤال في المتتاليات هو : $\dfrac{3}{11}$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 و يحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 وخمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4

(الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونسجل رقمها وليكن n .

إذا كان $n=2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتتين على التوالي من دون إرجاع .

إذا كان $n=3$: نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 .

– نعتبر الحدثين التاليين : A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون" .

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم" .

1) أ− بين أن : $P(A)=\dfrac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$ إحتمال الحدث B .

ب− بين أن : $P(A\cap B)=\dfrac{55}{378}$ ، ثم اِستنتج : $P_A(B)$.

ج− هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 .

– عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم اُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.

1) احسب كلا من : u_1 ، u_2 و u_3 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 0$.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{5(u_{n+1} - u_n)}{6u_n + 5}$.

ب- إستنتج أن الفرقين : $u_{n+2} - u_{n+1}$ و $u_{n+1} - u_n$ من نفس الإشارة .

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ . برر إجابتك .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 + ...+ nu_nv_n$.

- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $S_n = 5\left(\dfrac{n^2 + n}{2}\right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستو المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وحدة الطول هي $2cm$.

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(-x) + f(x) = 2$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل النقطة A كمركز التناظر يطلب تحديد إحداثييها .

ب - أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ ، ثم فسر النتائج بيانيا .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - (x + 1)$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $g'(x) = -\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

2) عين إتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(0)$ ثم حدد إشارة $g(x)$.

3) إستنتج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

4) أ – بين أن : $f(x)=x$ إذا وفقط إذا كان : $g(x)=-1$.

ب – إستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها α حيث : $2<\alpha<3$.

5) أنشئ المماس (T) ، المنحنى (C_f) و مستقيميه المقاربين .

6) m وسيط حقيقي ، عين بيانيا قيم m حتى تقبل المعادلة : $f(x)=mx+1$ حلان مختلفان في الإشارة و حل معدوم .

III) 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}-1$ ، ثم إستنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) احسب بـــ : cm^2 مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (D) و حامل محور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x=1$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+2^n.u_n}$.

1) احسب u_1 .

2) أ – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$.

ب – ادرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{2^n.u_n}$.

أ – برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب – اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n=\dfrac{1}{(n+2)2^{n-1}}$.

ج – احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0.v_0+u_1.v_1+......+u_n.v_n$.

أ– بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

ب– عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n\le1,9999$.

التمرين الثاني:(05 نقاط)

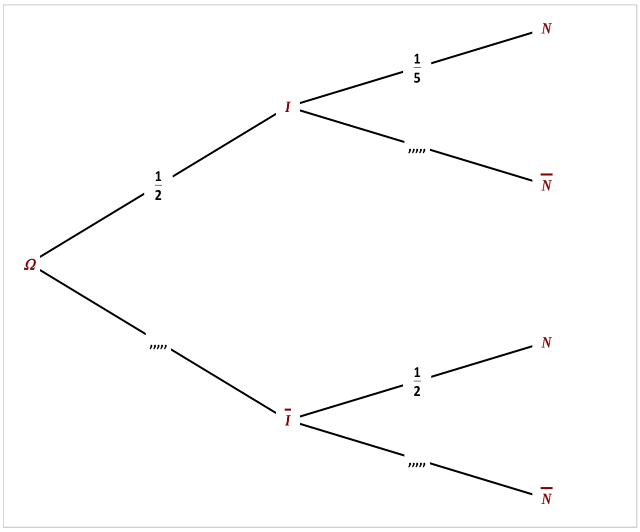
يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة ولا فرق بينها عند اللمس) .

✍ نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في **آن واحد** ثلاث كريات من الصندوق .

☜ نعتبر الأحداث التالية : I " الرقم الظاهر فردي" ، N " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

1) احسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\bar{I}}(N)$ و $P(N\cap I)$.

2) أ – أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم أكملها .



ب – بين أن : $P(N)=\dfrac{7}{20}$.

3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟ .

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ – بين أن : $P(X=1)=\frac{11}{20}$.

ب – عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

جـ – أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

التمرين الثالث:(03 نقاط)

نعتبر التكاملين التاليين : $I=\int_0^{\ln 2}\frac{3e^x+2}{e^x+1}dx$ و $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}dx$.

1) أ ـ تحقق أن : $I-J=\int_0^{\ln 2}\left(1-e^x\right)dx$.

ب ـ استنتج أن : $I-J=\ln 2-1$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}=e^x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$.

3) احسب J ، ثم استنتج I .

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=\frac{\ln x}{x}+1$.

1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,5;0,6[$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من الجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+x-1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب كلا من : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر بيانيا النهاية عند 0 .

2) أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=g(x)$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) أ – اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب – ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

4) أنشئ (T) ، ثم مثل (C_f) . (نضع : $f(\alpha)\approx -0{,}3$)

5) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــــ : $h(x)=-\frac{1}{2}(\ln|x|)^2-|x|+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ – اثبت أن الدالة h زوجية .

ب – اشرح كيفية تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم مثله .

6) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة : $y=mx-m$.

أ – بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

ب – ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx-m$.

7) أ – بين أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

ب – باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ حيث : $0<\lambda<1$ و $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}(\ln x)^2\,dx$.

جـ – احسب بدلالة λ مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحني (C_f) ، المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$x=1$ ، $x=\lambda$.

إنتهى الموضوع الثاني