الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية المسيلة — **ثانوية :المجاهد الحاج خيري الخير –مقرة–**
امتحان البكالوريا التجريبي — **يوم :** 16 **ماي** 2022
المستوى : 03 **علوم تجريبية**

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة :** 03 **ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{x}+2e^{-x}-3$.
m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;2]$ ، مدوّر m إلى الوحدة هو:
أ) 1 ب) 2 ج) -1

2) إذا كانت الأعداد : $\left(1-e^{-2}\right)$ ، $\left(e^{-2}-e^{-4}\right)$ و a تشكل حدودًا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن:
أ) $a=1-e^{-4}$ ب) $a=e^{-2}-e^{-6}$ ج) $a=e^{-4}-e^{-6}$.

3) يفتح قفل بتشكيل حرفين من المجموعة $\{A;B;C\}$ ثم يتبع بعدد مكون من 5 أرقام من المجموعة $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. عدد الطرق الممكنة لفتح هذا القفل هي:
أ) $A_3^2\times A_{10}^5$ ب) $A_3^2\times 10^5$ ج) $3^2\times 10^5$

4) يحتوي كيس على كرتين بيضاوين و n كرة سوداء (n عدد طبيعي حيث : $n\geq 2$) .
احتمال سحب كرتين سوداوين في آن واحد هو:
أ) $\dfrac{n}{(n+2)(n+1)}$ ب) $\dfrac{n^2-n}{(n+2)(n+1)}$ ج) $\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بهما كرات متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس ، بحيث :
U_1 : يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام $0,2,1,1,1$ وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام $0,1,1$.
U_2 : يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام $2,1,1$ وكرتين خضراوين تحملان الرقمين $0,1$.
– نختار عشوائيًا أحد الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي و بإرجاع.

1) أُحسب احتمال الحوادث التالية : A : "سحب كرتين من نفس اللون" B : "سحب كرتين تحملان نفس الرقم" .

2) بيّن أن : $P(A\cap B)=\dfrac{37}{175}$ ، هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ علّل.

3) إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

4) نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3.
نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X ، عرّف قانون إحتماله ثم أُحسب $V(-3X+7)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بــ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n$.

1) أ) برهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، استنتج أنها متقاربة ثم عيّن نهاية المتتالية (U_n).

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول V_1.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

3) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بــ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهن أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول W_1.

4) أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n حيث: $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ و $P_n = \frac{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n}{n!}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ: $g(x) = 1 - x^2(1-\ln(x))$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 الآخر α حيث : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

3) عيّن إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x.

II) f دالة عددية معرفة بــ: $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y = x$. وحدة الطول 2cm.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x(1-\ln x) = 0$ ، ثم استنتج أن $D_f =]0;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e};+\infty[$.

2) عيّن نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف ، ثم فسّر النتائج بيانيا.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2(1-\ln(x))^2}$.

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) أ) تحقق أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$.

ب) أدرس الوضعية النسبية بين (D) و (C_f) من أجل كل عدد حقيقي x من D_f .

6) أنشئ (C_f) و (D).

7) أ) أحسب الدالة المشتقة للدالة $x \longmapsto 1 - \ln(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من D_f.

ب) بيّن أن : $\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)$. ثم أحسب بــ cm^2 : $\mathscr{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (D) والمستقيمين : $x = 1$ و $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \mathrm{e}, u_1 = \mathrm{e}^2 \\ n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} \times u_{n-1} = u_n^2 \end{cases}$ ، فإن (U_n) متتالية:

أ) حسابية أساسها $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$ ب) هندسية أساسها e ج) لا حسابية ولا هندسية

2) حلول المعادلة التفاضلية : $y'' = \dfrac{1}{x^2}$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال من الشكل:

أ) $g(x) = -\dfrac{1}{x} + c$ ب) $g(x) = \ln|x| + c_1 x + c_2$ ج) $g(x) = -\ln|x| + c_1 x + c_2$

3) A و B حادثتان مستقلتان من مجموعة إمكانيات بحيث: $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.4$ ، فإن:

أ) $P(A \cup B) = 0.7$ ب) $P(A \cup B) = 0.58$ ج) $P(A \cup B) = 0.12$

4) يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة ، يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا.
عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث التلميذ X موجودا في اللجنة هو:

أ) 2436 ب) 812 ج) 484

التمرين الثاني: (05 نقاط)

صندوق يحوي 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم $1-$ و ثلاثة منها تحمل الرقم 0 واثنتان منها تحمل الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 ، 2. لا نميز بين الكرات عند اللمس.

I) نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد.

1) أُحسب احتمال الحوادث التالية :

A: سحب كرتين من نفس اللون. B: سحب كرة سوداء على الأكثر. C: سحب كرة سوداء على الأقل.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل عملية سحب جداء الرقمين المسجلين على الكرتين.

أ) عين قيم X ثم عيّن قانون احتماله.

ب) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X^2 ثم أُحسب أمله الرياضياتي $E\left(X^2\right)$.

II) نسحب عشوائيا من الصندوق n كرة في آن واحد حيث $1 \leq n \leq 9$.

نسمي $P(D)$ احتمال الحادثة :"سحب كرة واحدة حمراء فقط".

1) أُحسب $P(D)$ بدلالة n ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D) = \dfrac{7}{15}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$.

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

ب) بيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة.

ج) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عيّن نهايتها ℓ .

2) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3 - (U_n)^2}$.

أ) بين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أُكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = (U_1)^2 + (U_2)^2 + \cdots + (U_{n-1})^2$ و $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

أ) تحقق أن : $S_{n+1} = S_n + (U_n)^2$ ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $n \leq S_n \leq 3n$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $nS_{n+1} - (n+1)S_n = nU_n^2 - S_n$.

ج) أُحسب $T_{n+1} - T_n$ ، ثم استنتج أن (T_n) متتالية متزايدة.

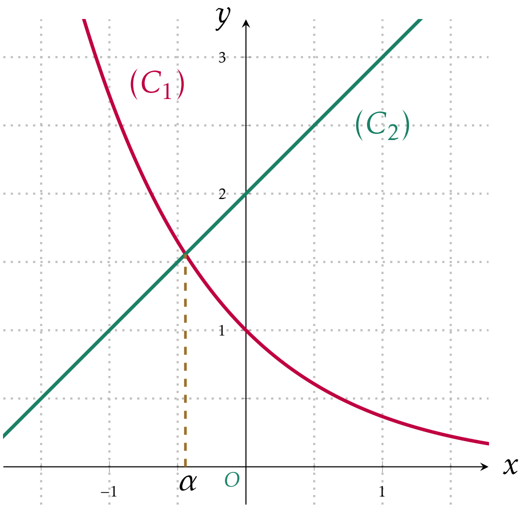
التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس في الشكل المقابل :

(C_1) و (C_2) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $x \longmapsto e^{-x}$ و $x \longmapsto x+2$

(C_1) و (C_2) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α .

الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$.



1) بقراءة بيانية ، حدد حسب قيم x من $\mathbb{R}$ وضعية (C_1) بالنسبة إلى (C_2)

2) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أنّ : $-0.5 < \alpha < -0.4$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$: بـ: $f(x) = -x + 1 + \dfrac{x-1}{e^x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 1cm.

1) أ) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -\dfrac{g(-x)}{e^x}$.

ج) أُدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

3) بين أنّ : $f(-\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha+2}$ ، ثم استنتج حصرًا لـ $f(-\alpha)$.

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (T) معامل توجيهه -1 ، ثم أُكتب معادلته.

5) أنشئ (C_f) ، (D) و (T).

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + 2m$.

7) باستعمال المكاملة بالتجزئة أُحسب بـ cm^2 : $\mathscr{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، (D) ، محور التراتيب والمستقيم ذو المعادلة : $x = 1$.

إنتهى الموضوع الثاني

الموضوع الأول :

التمرين الأول :

تعيين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{x}+2e^{-x}-3$.

m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;2]$ ، مدوّر m إلى الوحدة هو:

أ) 1

التبرير:
$$m=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}e^{t}+2e^{-t}-3\,dt=\frac{1}{2}\left[e^{t}-2e^{-t}-3t\right]_{0}^{2}$$

ومنه:
$$m=\frac{1}{2}\left[e^{2}-2e^{-2}-6-1+2\right]=\frac{e^{2}-2e^{-2}-5}{2}\approx 1.05$$

ومنه مدوّر m إلى الوحدة هو: 1.

2) إذا كانت الأعداد : $(1-e^{-2})$ ، $(e^{-2}-e^{-4})$ و a تشكل حدودًا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن: ج) $a=e^{-4}-e^{-6}$.

التبرير: بما أن الأعداد : $(1-e^{-2})$ ، $(e^{-2}-e^{-4})$ و a تشكل حدودًا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن: $(e^{-2}-e^{-4})^{2}=a\times(1-e^{-2})$ ومنه
$$a=\frac{(e^{-2}-e^{-4})^{2}}{(1-e^{-2})}=\frac{e^{-4}(1-e^{-2})^{2}}{(1-e^{-2})}=e^{-4}(1-e^{-2})=e^{-4}-e^{-6}$$

3) يفتح قفل بتشكيل حرفين من المجموعة $\{A;B;C\}$ ثم يتبع بعدد مكون من 5 أرقام. عدد الطرق الممكنة لفتح هذا القفل هي: ج) $3^{2}\times 10^{5}$

التبرير: نختار من المجموعة $\{A;B;C\}$: $p=2$ عنصرا منها و نختار من بين 10 أرقام عدد مكون من $p=5$ رقما من المجموعة $\{0;\cdots;9\}$ ومنه عدد الطرق المختلفة: $3^{2}\times 10^{5}$.

4) يحتوي كيس على كرتين بيضاوين و n كرة سوداء مع $n\geq 2$.

احتمال سحب كرتين سوداوين في آن واحد هو: ب) $\frac{n^{2}-n}{(n+2)(n+1)}$

التبرير: لدينا:
$$\frac{C_{n}^{2}}{C_{n+2}^{2}}=\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+2)!}{2!n!}}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}\,\frac{2!n!}{(n+2)(n+1)n!}$$

ومنه:
$$\frac{C_{n}^{2}}{C_{n+2}^{2}}=\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^{2}-n}{(n+1)(n+2)}$$

التمرين الثاني :

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بهما كرات متماثلة لا نفرّق بينها باللّمس ، بحيث :

U_1 : يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0,2,1,1,1 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0,1,1.

U_2 : يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 2,1,1 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 0,1.

– نختار عشوائيًا أحد الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي و بإرجاع.

1) حساب احتمال كل حادثة من الحوادث: A ، B :

الحادثة A: $(2R;2V)_{U1},(2R;2V)_{U2}$

إذن :
$$P(A)=\frac{1}{2}\,\frac{A_{5}^{2}+A_{3}^{2}}{A_{8}^{2}}+\frac{1}{2}\,\frac{3^{2}+2^{2}}{5^{2}}=\frac{689}{1400}$$

الحادثة B: $(1,1)_{U2},(2,2)_{U2},(0,0)_{U2}$ $(1,1)_{U1},(0,0)_{U1}$

إذن :
$$P(B)=\frac{1}{2}\,\frac{A_{5}^{2}+A_{2}^{2}}{A_{8}^{2}}+\frac{1}{2}\,\frac{3^{2}+1^{2}+1^{2}}{5^{2}}=\frac{583}{1400}$$

2) الحادثة $A\cap B$: سحب كرتين تحملان نفس اللّون ونفس الرقم:

$(V_0,V_0)_{U2},(R_2,R_2)_{U2}$ $(R_1,R_1)_{U2},(V_1,V_1)_{U2}$ $(R_1,R_1)_{U1},(V_1,V_1)_{U1}$

ومنه
$$p(A\cap B)=\frac{1}{2}\,\frac{A_{3}^{2}+A_{2}^{2}}{A_{8}^{2}}+\frac{1}{2}\,\frac{2^{2}+1^{2}+1^{2}+1^{2}}{5^{2}}=\frac{37}{175}$$

لدينا $P(A)\times P(B)\approx 0.2114\neq p(A\cap B)$ ، ومنه الحادثتان A و B غير مستقلتين.

3) إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 :

$$P_{\overline{A}}(U_1)=\frac{P(\overline{A}\cap U_1)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A})\cap U_1)}{1-P(A)}$$

الحادثة $\overline{A}\cap U_1$: سحب كرتين مختلفتي اللون من U_1 أي: $(1R,1V)$ ومنه:

$$P_{\overline{A}}(U_1)=\frac{\frac{1}{2}\,\frac{2A_{5}^{1}A_{3}^{1}}{A_{8}^{2}}}{1-P(A)}=\frac{125}{237}.$$

4) نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3.

نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

أ) قيم المتغير العشوائي X هي $X=\{0;1;2;3;4\}$

$X=0$ معناه سحب كرتين تحملان الرقم 0 ومنه
$$P(X=0)=\frac{C_{3}^{2}}{C_{13}^{2}}=\frac{1}{78}$$

$X=1$ معناه سحب كرتين تحملان الرقمين 0 و 1 ومنه
$$P(X=1)=\frac{C_{3}^{1}\times C_{8}^{1}}{C_{13}^{2}}=\frac{24}{78}$$

$X=2$ معناه سحب كرتين تحملان الرقمين 1 و 1 أو 0 و 2 ومنه
$$P(X=2)=\frac{C_{8}^{2}+C_{3}^{1}\times C_{2}^{1}}{C_{13}^{2}}=\frac{34}{78}$$

$X=3$ معناه سحب كرتين تحملان الرقمين 2 و 1 ومنه
$$P(X=3)=\frac{C_{8}^{1}\times C_{2}^{1}}{C_{13}^{2}}=\frac{16}{78}$$

$X=4$ معناه سحب كرتين تحملان الرقم 2 ومنه
$$P(X=4)=\frac{C_{2}^{2}}{C_{13}^{2}}=\frac{1}{78}$$

قانون إحتمال المتغير العشوئي X:

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

$$E(X)=\frac{24}{13}\approx 1.89 \text{ و } V(X)=\frac{352}{307}\approx 0.7$$

$$V(-3X+7)=9V(X)=9\times\frac{352}{307}$$

التمرين الثالث :

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرّفة بـ: $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n$.

1) أ)نبرهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $U_n \geq 0$.

نسمي الخاصية $p(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

من أجل $n=1$ لدينا : $U_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ومنه $p(1)$ صحيحة

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي حيث : $n \geq 1$

و نثبت صحة $p(n+1)$ أي $U_{n+1} \geq 0$

لدينا من الفرض : $U_n \geq 0$ ومنه $\frac{n+1}{2n}U_n \geq 0$ وعليه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $U_n \geq 0$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) وإستنتاج أنها متقاربة

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right)U_n = \frac{n+1-2n}{2n}U_n = \frac{1-n}{2n}U_n$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $\frac{1-n}{2n} \leq 0$ و $U_n \geq 0$ ومنه $U_{n+1} - U_n \leq 0$. إذن (U_n) متتالية متناقصة

بماأن (U_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل بـ: 0 فهي متقاربة.

–تعيين نهاية المتتالية (U_n).

بما أن المتتالية (U_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$ مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية المتتالية (U_n) تحقق: $\ell = \frac{1}{2}\ell$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

ومنه $\frac{1}{2}\ell = 0$ إذن $\ell = 0$.

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = \frac{U_n}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية وتحديد أساسها و حدها الأول :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{U_n}{2n} = \frac{1}{2}V_n$$

إذن V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_1 = \frac{1}{2}$

ب) تعين عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$

تعين عبارة U_n : لدينا $V_n = \frac{U_n}{n}$ ومنه $U_n = nV_n$ إذن: $U_n = \frac{n}{2^n}$

3)

4) نعتبر المتتالية العددية بدلالة (W_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $W_n = \ln(V_n)$.

أ) برهان أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$W_{n+1} - W_n = \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) = \ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = -\ln 2 = r$.

$W_1 = \ln V_1 = -\ln 2$.

5) حساب بدلالة n كل من S_n و P_n حيث: $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ و $P_n = \frac{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n}{n!}$.

S_n عبارة عن مجموع حدود متتالية حسابية

إذن:

$$S_n = \frac{n}{2}(W_n + W_1) = \frac{n}{2}(-\ln 2 - (n-1)\ln 2 - \ln 2)$$

ومنه $S_n = -\frac{n\ln 2}{2}(n+1)$

حساب P_n:

لدينا: $P_n = \frac{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = \frac{U_1}{1} \times \frac{U_2}{2} \times \cdots \times \frac{U_n}{n}$

إذن $P_n = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\ldots+n}$

ومنه $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n)}{2}}$.

التمرين الرابع :

I) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln(x))$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2(1-\ln(x)) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 - x^2(1-\ln(x)) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 - x^2 + x^2\ln(x) = 1$$

2) دراسة إتجاه تغير دالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' حيث :

$g'(x) = -2x(1-\ln(x)) - x^2\frac{-1}{x} = -2x + 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x) - 1)$.

$g'(x) = 0$ تكافئ $2\ln(x) - 1 = 0$ تكافئ $\ln(x) = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = e^{\frac{1}{2}}$ ، مع $x > 0$

– دراسة إشارة $g'(x)$:

$g'(x) > 0$ تكافئ $2\ln(x) - 1 > 0$ تكافئ $\ln(x) > \frac{1}{2}$ تكافئ $x > e^{\frac{1}{2}}$

$g'(x) < 0$ تكافئ $2\ln(x) - 1 < 0$ تكافئ $\ln(x) < \frac{1}{2}$ تكافئ $x < e^{\frac{1}{2}}$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 الآخر α حيث :

. $1 < \alpha < e$.

$g(1) = 0$ و لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1, e^{\frac{1}{2}}]$ (رتيبة) و $0 \notin]1, e^{\frac{1}{2}}]$ إذن لا يوجد حلول في المجال $]1, e^{\frac{1}{2}}]$.

في المجال $\left[e^{\frac{1}{2}}, e\right]$ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما ، و: $g(e) \times g\left(e^{0.5}\right) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و شرط الرتابة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]e^{\frac{1}{2}}, e\right[$ . .

استنتاج: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 الآخر α حيث : $1 < \alpha < e$.

4) إستنتاج إشارة $g(x)$

لدينا :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) f دالة عددية معرفة بـ: $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x(1-\ln x) = 0$: معناه $x = 0$ او $x = e$.

الدالة f معرفة من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما و $x(1-\ln x) \neq 0$ يكافئ $D_f =]0;e[\cup]e;+\infty[$.

2) حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ ثم عند 0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(1-\ln(x))} = 0$$

المستقيم ذي المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x(1-\ln(x))}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln(x)}$$

ندرس إشارةالمقام:

x	0		e		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
$x(1-\ln(x))$	‖	$+$	0	$-$	

إذن $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln(x)}=+\infty$

المستقيم ذي المعادلة $x=0$ مقارب لـ: (C_f).

$$\lim_{x\xrightarrow{>}e} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x(1-\ln(x))}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}e} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x(1-\ln(x))}=+\infty$$

المستقيم ذي المعادلة $x=e$ مقارب لـ: (C_f).

3) إثبات من أجل كل عدد حقيقي x من D_f أن :

$f'(x)=\frac{\ln(x)}{x^2(1-\ln(x))^2}$. الدالة f قابلة لإشتقاق و دالتها المشتقة $f'(x)$ حيث :

$$f'(x)=-\frac{1-\ln(x)-1}{x^2(1-\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)}{x^2(1-\ln(x))^2}$$

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f

بما أن $x^2(1-\ln(x))^2>0$ فإن: إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln(x)$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]1;e[$ و $]e;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;1[$.

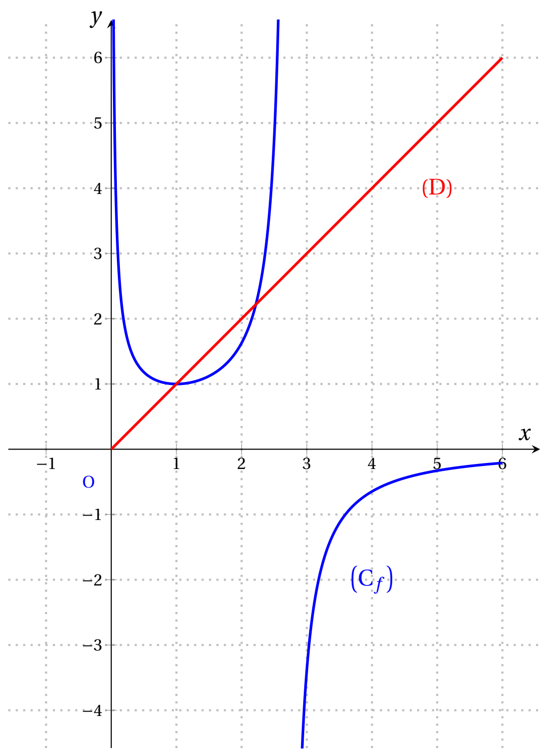
5) أ) التحقق أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$

لدينا: $f(x)-x=\frac{1-x^2(1-\ln(x))}{x(1-\ln(x))}=\frac{g(x)}{x(1-\ln(x))}$.

ب) دراسة الوضعية النسبية بين (D) و (C_f) من أجل كل عدد حقيقي x من D_f . $f(x)-x=0$ يكافئ $g(x)=0$ أي $x=1$ او $x=\alpha$

x	0		1		α		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x(1-\ln(x))$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في النقطة	(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في النقطة	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)	

6) إنشاء (C_f) و (D)



7) أ) الدالة المشتقة للدالة $x\longmapsto 1-\ln(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من D_f هي: $x\longmapsto -\frac{1}{x}$

ب) نبيّن أن : $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \ln(2)$.

$$\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln(x))}\,d$$
$$= -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{-1}{x}}{1-\ln(x)}\,dx = -\left[\ln(1-\ln(x))\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$= \ln(1-\ln(1)) - \ln\left(1-\ln\sqrt{e}\right)$$
$$= 0 - \ln\left(1-\frac{1}{2}\ln e\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

نحسب بـ cm^2 : مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (D) والمستقيمين : $x=1$ و $x=\sqrt{e}$.

$$\mathscr{A} = -\int_1^{\sqrt{e}} f(x)-x\,dx = -\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx - + \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx = -\ln 2 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$= \left(-\ln 2 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right)\times 4cm^2$$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : تعيين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = e,\ u_1 = e^2 \\ n\in\mathbb{N}^* : u_{n+1}\times u_{n-1} = u_n^2 \end{cases}$ ، فإن (U_n) متتالية:

ب) هندسية أساسها e .

التبرير: u_{n+1} ، u_n و u_{n-1} ثلاث حدود متعاقبة تحقق العلاقة $u_{n+1}\times u_{n-1} = u_n^2$ (الوسط الهندسي) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{u_1}{u_0} = e$.

2) حلول المعادلة التفاضلية : $y'' = \frac{1}{x^2}$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال من الشكل:

ج) $g(x) = -\ln|x| + c_1x + c_2$

التبرير: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $y'' = \frac{1}{x^2}$ ومنه $y' = -\frac{1}{x} + c_1$ إذن $y = -\ln|x| + c_1x + c_2$ حيث c_1 و c_2 ثوابت حقيقية.

3) A و B حادثتان مستقلتان من مجموعة إمكانيات بحيث: $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.4$ ، فإن: ب) $P(A\cup B)=0.58$

التبرير:

نعلم أن $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

و $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ لأن A و B حادثتان مستقلتان ومنه:

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) = 0.58$

4) يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة ، يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا.

عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث التلميذ X موجودا في اللجنة هو: أ) 2436

التبرير: التلميذ X يمكن أن يكون رئيسا أو نائبا أو أمينا

ومنه: $3A_1^1 \times A_{29}^1 = 2436$

التمرين الثاني : صندوق يحوي 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم −1 و ثلاثة منها تحمل الرقم 0 واثنتان منها تحمل الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 ، 2. لا نميز بين الكرات عند اللمس.

I) نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد.

ـ عدد السحبات: $C_{10}^2 = 45$.

1) حساب احتمال الحوادث التالية :

A: سحب كرتين من نفس اللون. 2B أو 2R

$P(A) = \frac{C_8^2 + C_2^2}{45} = \frac{29}{45}$.

B: سحب كرة سوداء على الأكثر. 1B1R أو 2R

$P(B) = \frac{C_8^1 + C_2^1 + C_2^2}{45} = \frac{17}{45}$.

C: سحب كرة سوداء على الأقل. $\overline{C}$ سحب كرتين حمراوين ومنه:

$P(C) = 1 - \frac{C_2^2}{45} = \frac{44}{45}$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل عملية سحب جداء الرقمين المسجلين على الكرتين.

أ) تعيين قيم X: $X = \{-2;-1;0;1;2\}$.

$X=-2$: سحب كرتين تحملان الرقمين 2 و −1

$$P(x=-2) = \frac{C_1^1C_3^1}{45} = \frac{3}{45}$$

$X=-1$: سحب كرتين تحملان الرقمين 1 و −1

$$P(x=-1) = \frac{C_3^1C_3^1}{45} = \frac{9}{45}$$

$X=0$: سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 0 و الأخرى لا تحمل الرقم 0 أو سحب كرتين تحملان الرقم 0.

$$P(x=0) = \frac{C_3^2 + C_7^1C_3^1}{45} = \frac{24}{45}$$

$X=1$: سحب كرتين تحملان الرقم 1 أو تحملان الرقم −1

$$P(x=1) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{45} = \frac{6}{45}$$

$X=2$: سحب كرتين إحداهما تحمل الرقم 2 و الأخرى تحمل الرقم 1

$$P(x=0) = \frac{C_1^1C_3^1}{45} = \frac{3}{45}$$

قانون إحتمال المتغير العشوائي X:

$X=x_i$	-2	-1	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{3}{45}$

ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X^2

$$P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{24}{45}$$
$$P(X^2=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{15}{45}$$
$$P(X^2=4) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{6}{45}$$

$X^2 = x_i^2$	0	1	4
$p(X^2=x_i^2)$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{6}{45}$

حساب أمله الرياضياتي $E(X^2) = \frac{39}{45}$.

II) نسحب عشوائيا من الصندوق n كرة في آن واحد حيث $1\le n\le 9$.

نسمي P(D) احتمال الحادثة :"سحب كرة واحدة حمراء فقط".

1) حساب P(D) بدلالة n :

$$P(D) = \frac{C_2^1\ C_8^{n-1}}{C_n^{10}} = \frac{2\frac{8!}{(n-1)!(9-n)!}}{\frac{10!}{n!(10-n)!}}$$

ومنه $P(D) = 2\frac{8!}{(n-1)!(9-n)!}\frac{n!(10-n)!}{10!}$

إذن: $P(D) = \frac{n(10-n)}{45}$

ثم تعيين قيم العدد الطبيعي n من أجل $P(D)=\frac{7}{15}$.

أي $\frac{n(10-n)}{45}=\frac{7}{15}$ يكافئ $n^2-10n+21=0$ أي $n=3$ أو $n=7$.

التمرين الثالث : (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$.

1) أ) نبرهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le U_n\le\sqrt{3}$.

نسمي الخاصية $p(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le U_n\le\sqrt{3}$

من أجل $n=0$ لدينا : $1\le U_0=1\le\sqrt{3}$ ومنه $p(0)$ صحيحة

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي : $n\ge 0$

و نثبت صحة $p(n+1)$ أي $1\le U_{n+1}\le\sqrt{3}$

نضع من أجل كل x عدد حقيقي من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ ومنه $f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2+1}>0$ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

لدينا $1\le U_n\le\sqrt{3}$ ومنه

$f(1)\le U_n\le f\left(\sqrt{3}\right)$

إذن $1\le U_{n+1}\le\sqrt{3}$ إذن $p(n+1)$ صحيحة ،ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le U_n\le\sqrt{3}$

ب) نبيّن أن المتتالية (U_n) متزايدة.

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}-U_n=\frac{2U_n-U_n\sqrt{U_n^2+1}}{\sqrt{U_n^2+1}}$$
$$=\frac{U_n\left(2-\sqrt{U_n^2+1}\right)}{\sqrt{U_n^2+1}}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n>0$

ولدينا كذلك $\sqrt{2}\le\sqrt{U_n^2+1}\le 2$ ومنه $-2\le-\sqrt{U_n^2+1}\le-\sqrt{2}$ ومنه

$0\le 2-\sqrt{U_n^2+1}\le 2-\sqrt{2}$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة.

ج) بما أن المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ فهي متقاربة.

تعيين نهايتها ℓ

مما سبق الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[0;+\infty[$ والمتتالية (U_n) متقاربة إذن نهايتها تحقق $f(\ell)=\ell$ يكافئ

$\ell=\frac{2\ell}{\sqrt{\ell^2+1}}$ ومنه $\ell^2=\frac{4\ell^2}{\ell^2+1}$ يكافئ $\ell^2+1=4$ ومنه $\ell=\sqrt{3}$ مقبول أو $\ell=-\sqrt{3}$ مرفوض.

2) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $V_n=\frac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$.

أ) نبين أنّ المتتالية (V_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول.

$$V_{n+1}=\frac{(U_{n+1})^2}{3-(U_{n+1})^2}=\frac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{3-\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}=\frac{4U_n^2}{-U_n^2+3}=4V_n$$

$V_0=\frac{1}{2}$

ب) كتابة V_n ثم U_n بدلالة n: $V_n=\frac{4^n}{2}=2^{2n-1}$

$-U_n^2V_n-U_n^2=-3V_n$ ومنه $U_n=\sqrt{\frac{3V_n}{1+V_n}}=\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{1+2^{2n-1}}}$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$S_n=(U_1)^2+(U_2)^2+\cdots+(U_{n-1})^2$ و $T_n=\frac{S_n}{n}$.

أ) التحقق أن : $S_{n+1}=S_n+(U_n)^2$:

$S_{n+1}=(U_1)^2+(U_2)^2+\cdots+(U_{n-1})^2+(U_n)^2=S_n+(U_n)^2$

نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $n\le S_n\le 3n$.

نسمي الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$p(n): n\le S_n\le 3n$.

$p(1): 1\le S_1=U_1^2=\sqrt{2}\le 3$ محققة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي $n\ge 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$:

$p(n+1): n+1\le S_{n+1}\le 3n+3$.

لدينا من الفرض $n\le S_n\le 3n$ و مما سبق $1\le U_n^2\le 3$ ومنه بالجمع نجد : $n+1\le S_n+U_n^2\le 3n+3$ ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $n\le S_n\le 3n$.

ب) نبيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$nS_{n+1}-(n+1)S_n=nU_n^2-S_n$.

$nS_{n+1}-(n+1)S_n=nS_n+nU_n^2-nS_n-S_n=nU_n^2-S_n$

ج) حساب $T_{n+1}-T_n$

$$T_{n+1}-T_n=\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}$$
$$=\frac{nU_n^2-S_n}{n(n+1)}$$

استنتاج أن (T_n) متتالية متزايدة.

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $n(n+1)>0$.

نسمي الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$p(n): nU_n^2\ge S_n$

من أجل $n=1$ لدينا $U_1^2\ge S_1=U_1^1$ الخاصية محققة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي $n\ge 1$:

$p(n+1): (n+1)U_{n+1}^2\ge S_{n+1}$

لدينا مما سبق $S_{n+1}=U_n^2+S_n$ ومنه $(n+1)U_{n+1}^2\ge U_n^2+S_n$

أي $p(n+1): (n+1)U_{n+1}^2-S_n+U_{n+1}^2-U_n^2\ge 0$

بما أن المتتالية (U_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم:

$U_{n+1}\ge U_n>0$ معناه $U_{n+1}^2\ge U_n^2$ ومنه $(n+1)U_{n+1}^2\ge nU_n^2$ و من الفرض $nU_n^2\ge S_n$ يكافئ $(n+1)U_{n+1}^2\ge nU_n^2\ge S_n$

إذن $nU_{n+1}-S_n\ge 0$

نستنتج أن: $(n+1)U_{n+1}^2-S_n+U_{n+1}^2-U_n^2\ge 0$

ومنه $p(n+1)$ محققة وعليه (T_n) متزايدة.

التمرين الرابع :

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}-x-2$.

1) بقراءة بيانية ، تحديد حسب قيم x من $\mathbb{R}$ وضعية (C_1) بالنسبة إلى (C_2) :

في المجال $]-\infty;\alpha[$: (C_1) يقع فوق (C_2).

في المجال $]\alpha;+\infty[$: (C_2) يقع فوق (C_1).

(C_1) يتقاطعان (C_2) عند $x=\alpha$.

2) إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3) التحقق أنّ $-0.5 < \alpha < -0.4$: $g(-0.5) \times g(-0.4) < 0$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x+1+\frac{x-1}{e^x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. وحدة الطول 1cm.

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+1+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-xe^x+e^x+x-1}{e^x} = -\infty$.

ب) نبين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$.
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -1+\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}} = -1+\frac{e^x(2-x)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{-e^x+2-x}{e^x} = -\frac{e^x+x-2}{e^x} = -\frac{g(-x)}{e^x}$$

ج) دراسة إتجاه تغير الدالة f : $e^x>0$ الإشارة من إشارة $-g(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

x	0		$-\alpha$		$+\infty$
$-g(-x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.
جدول التغيرات:

x	0		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2)

أ) نبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x} = 0$

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

$f(x)+x-1 = \frac{x-1}{e^x}$ مع $e^x>0$ ومنه $f(x)+x-1=0$ معناه $x=1$ إذن:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{e^x}$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (D)	(C_f) يقطع (D) في النقطة (1;0)	(C_f) فوق (D)	

3) نبين أنّ : $f(-\alpha) = \alpha+\frac{1}{\alpha+2}$

$$f(-\alpha) = +\alpha+1+\frac{-\alpha-1}{e^{-\alpha}}$$
$$= \alpha+1+\frac{-(\alpha+1)}{\alpha+2} \qquad g(\alpha)=0$$
$$= \alpha+1+\frac{-(\alpha+2)+1}{\alpha+2} = \alpha+1-1+\frac{1}{\alpha+2}$$
$$= \alpha+\frac{1}{\alpha+2}$$

حصر $f(-\alpha)$.

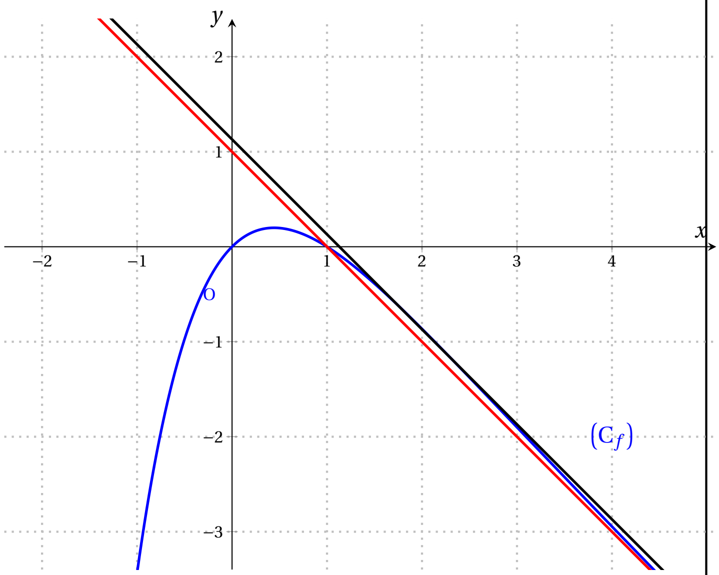
لدينا $-0.5<\alpha<-0.4$ ومنه $\frac{1}{1.6} < \frac{1}{2+\alpha} < \frac{1}{1.5}$ بالجمع نجد

$$-0.5+\frac{1}{1.6} < \frac{1}{2+\alpha} < -0.4+\frac{1}{1.5}$$

4) تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسًا (T) معامل توجيهه -1
يكافئ $f'(x)=-1$ ومنه $\frac{-e^x+2-x}{e^x}=-1$ أي $-e^x+2-x+e^x=0$ ومنه $x=2$

معادلته : $(T): y=-(x-2)-1+e^{-2} = -x+1+e^{-2}$.

5) إنشاء (C_f) ، (D) و (T).



6) الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-x+2m$ ومنه :

- ◄ $2m\in]-\infty;1]$ أي $m\in]-\infty;\frac{1}{2}]$ و $\frac{1+e^{-2}}{2}$ يوجد حل وحيد.
- ◄ $1<2m<1+e^{-2}$ أي $\frac{1}{2}<m<\frac{1+e^{-2}}{2}$ يوجد حلان
- ◄ $2m>1+e^{-2}$ أي $m>\frac{1+e^{-2}}{2}$ لا يوجد حلول.

7) حساب $\mathscr{A}$: cm^2:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 [f(x)+x-1]\,dx = -\int_0^1 (x-1)\,e^{-x}dx$$

$V'(x)=e^{-x} \quad V(x)=-e^{-x}$
$U(x)=x-1 \quad U'(x)=1$

$$[(x-1)e^{-x}]_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx = 1-[-e^{-x}]_0^1 = 1+e^{-1}-1 = e^{-1}\,cm^2$$