الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الجزائر شرق — مقترحات بكالوريا 2021

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة: ماي 2021

الشعبة : رياضيات

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة: 04 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن p النقطة ذات اللاحقة $Z_p=10$ و (Γ) الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي Ω مركز الدائرة (Γ). نعتبر النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب $Z_A=5+5i$, $Z_B=1+3i$ و $Z_C=8-4i$.

1) بين أن النقط C,B,A تنتمي إلى الدائرة (Γ) (يطلب إنشاء الشكل).

2) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $Z_D=2+2i$. بين ان النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC).

II. من اجل كل نقطة M من المستوي مختلفة عن O ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$ علما أن $\overline{z}$ يرمز إلى مرافق z.

1) بين أن النقط O ، M و M' على استقامة واحدة.

2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $x=2$ و M نقطة من (Δ) ذات اللاحقة z.

أ) تحقق أن: $z+\overline{z}=4$.

ب) عبر عن $z'+\overline{z'}$ بدلالة z و $\overline{z}$ ، ثم استنتج أن : $5(z'+\overline{z'})=z'\overline{z'}$.

ج) استنتج أن M' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) ثم علم النقطة M' في الشكل .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) تحقق أن $5^6\equiv 1[7]$ و استنتج $5^{2016}\equiv 1[7]$

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=1+5+5^2+\cdots+5^n$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=5^{n+1}-1$ واستنتج أن S_n و 5^n أوليان فيما بينهما.

ب) ليكن العدد الصحيح a . بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$.

جـ) بين أن $4S_{2015}\equiv 0[7]$ واستنتج باقي قسمة S_{2015} على 7.

د) عين اصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون 7 قاسم لـ S_n .

3) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم , نعتبرفي $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $5^n x + S_n y = 1$. تحقق أن $(5,-4)$ حل للمعادلة (E)
ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـــ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

1) بيّن أنّ : $e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.

أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n|\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

جـ) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب) ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد $2017^{4n+2}+2\times2019^{6n+4}$ على 7 .

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E)\ .....\ 343x-648y=76$.

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟ .

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d=76$.

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، ويكتب $\overline{\alpha1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي: $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$.

أ) احسب $P(-2)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z)=(z+2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$.

أ) أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

ج) عين ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$.

3)أ) أكتب على الشكل الأسي العدد : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

ب) استنتج أن A صورة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

ج) حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

د) عين اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$

1) أحسب u_2 ، u_1 و u_3 ثم عين أساس المتتالية q.

2) عبر عن عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$

4) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 .

ب) عين باقي القسمة الاقليدية لـلعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5.

ج)نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+...+\ln 4^n\right]$

- أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f_n(x)=\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $1cm$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـــ : $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و $0\le x\le 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le\frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\le I_n\le\frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4) أ) إعتمادا على السؤال $(1/\text{II})$ بيّن أنّ : $I_n+nI_{n+1}=1-\frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إستنتج : $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـــ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الموسم الدراسي: 1442-41 هـ الموافق لـ 20-2021 م

الحل المفصل للبكالوريا التجريبي في مـادة الرياضيـات

للسنة الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

الموضـــــــــــــــــــــــوع الأول

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)	الأعداد المركبة	التنقيط
I) 1-) بما أن $\Omega A = \lvert 5i \rvert = 5$ و $\Omega B = \lvert -4+3i \rvert = 5$ و $\Omega C = \lvert 3-4i \rvert = 5$ اذن النقط A , B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات القطر [O P] .		0.75
* إنشاء الشكل : تمثيل النقط : Ω , A , B و C و الدائرة (Γ)		0.25
2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC}\binom{7}{-7}$ و $\overrightarrow{DB}\binom{-1}{1}$ اذن $\overrightarrow{BC} = -7\overrightarrow{DB}$ و منه $D \in (BC)$ و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BC} = 0$ أي $(OD) \perp (BC)$ نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)		0.75
II) 1-) نفرض أن M(x , y) نعلم أن $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)$ علما أن $Z' = \frac{20}{\bar{Z}}$ و بالتالي : $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$ حيث : $Z\bar{Z}' = x^2 + y^2$ أي $Z\bar{Z} \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_*^+$ اذن $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : O , M , M ' على استقامة واحدة		0.25 0.75
2-)أ-) بما أن $M \in (\Delta)$ فإن : $Z = 2 + iy$ ومنه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$		0.25
ب-) لدينا : $Z' + \bar{Z'} = \frac{20}{\bar{Z}} + \frac{20}{Z} = \frac{20Z+20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z+\bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$		0.5
*) حسب الجواب السابق : $5(Z' + \bar{Z'}) = 5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right) = \frac{400}{Z\times\bar{Z}} = \frac{20}{Z} \times \frac{20}{\bar{Z}}$ اذن $5(Z' + \bar{Z}) = Z' \times \bar{Z'}$		0.5
ج-) من جهة حسب الجواب II – 1) النقط O , M و M ' في استقامية و منه $M' \in (OM)$ من جهة ثانية : $\Omega M' = \lvert Z' - 5 \rvert$ (علما أن $Z \times \bar{Z} = \lvert Z \rvert^2$) . و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z'-5)\overline{(Z'-5)}$ أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z'} - 5(Z' + \bar{Z'}) + 25$ و بما أن $Z' + \bar{Z'} = 4$ و $Z' \times \bar{Z'} = 5(Z' + \bar{Z'})$ نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$. و بالتالي M ' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) .		01

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)	الأعداد و الحساب	التنقيط

-1 $5^6 = 15625$ $5^6 \equiv 1\ [7]$	0.25
ندرس بواقي قسمة 5^n على 7 $5^0 \equiv 1[7]$, $5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$ $5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$ $5^6 \equiv 1[7]$ دورية و دورها $k = 6n$	0.25
$5^6 \equiv 1[7]$ $5^{2016} \equiv 5^{6n} \equiv 1[7]$ $2016 = 6 \times 336 = 6n$	0.25
-2 $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \ ... + 5^n$ أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n و $4S_n = 5^{n+1}$ لذلك نحسب $S_n = 1 + 5^0 + 5^1 + 5 \times 5 \ ... 5^n$ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الاول 1 و أساسها $q = 5$ $S_n = 1\left(\dfrac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}\right)$	0.25
و منه $4S_n = 5^{n+1} - 1$	0.25
لدينا $4S_n = 5^{n+1} - 1$ تكتب على الشكل $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ يوجد (5, -4) بحيث $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه S_n 5^n , أوليان فيما بينهما	0.25
ب) بين اذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$ لدينا $4S_n \equiv a\ [7]$ نضرب في 2 $8S_n \equiv 2a\ [7]$ $8 \equiv 1\ [7]$ ومنه $S_n \equiv 2a\ [7]$	0.25
العكس : بين أنه إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فان $4\ S_n \equiv a\ [7]$ لدينا $S_n \equiv 2a\ [7]$ نضرب في العدد 4 $4S_n \equiv 8a\ [7]$ $8a \equiv a\ [7]$ $4\ S_n \equiv a\ [7]$ ي	0.25

ج) بين أن : $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$ باستعمال السؤال 1 نجد $5^{2016} \equiv 1\ [7]$ و منه $4\,S_{2015} \equiv 5^{2016} - 1\ [7]$ $5^{2016} - 1 \equiv 0\ [7]$ $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$	0.25
استنتج باقي قسمة S_{2015} على 7 لدينا حسب ما سبق: $4\,S_{2015} \equiv 0\ [7]$ فان $S_{2015} \equiv 2 \times 0\ [7]$ ومنه باقي قسمة على 7 هو العدد 0	0.25
د) عين اصغر عدد طبيعي n حيث يكون 7 قاسم لـ S_n معناه: $S_n \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} - 1 \equiv 0\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 1\ [7]$ $5^{n+1} \equiv 5^0\ [7]$ $n+1=0,\quad n=-1,$ مرفوضة -1 و هو المطلوب $n+1=6,\quad n=5\quad ,$	0.5
$S_n = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$ 3- حلول المعادلة (E) هي : $(x,y) = (KS_n + 5\ ,-K \times 5^n - 4)\quad ,\quad K \in \mathbb{Z}$	01
تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) الأعداد المركبة + المتتاليات	**التنقيط**
1- $e^{i\theta} + 1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2})}[e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})}] = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2})}$	01
2- نضع $z_n = ae^{ib}$ حيث a عدد حقيقي و $b \in]0,\frac{\pi}{2}[$ ومنه $u_n = \arg(z_n) = b$ ومن جهة اخرى لدينا $u_{n+1} = \arg(z_{n+1}) = \arg(z_n + \lvert z_n \rvert) = \arg(a(e^{ib}+1)) = \arg(2a\cos(\frac{b}{2})e^{i\frac{b}{2}}) = \frac{b}{2} = \frac{u_n}{2}$ وبالتالي u_n متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$	0.75
- $u_n = \theta \times (\frac{1}{2})^n$	0.25
3- ا) $v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}} = z_n + \lvert z_n \rvert - (\overline{z_n} + \lvert z_n \rvert) = z_n - \overline{z_n} = v_n$	0.5

0.5	- نستنتج ان v_n متتالية ثابتة وان $v_n = v_0 = z_0 - \overline{z_0} = 2i\sin(\theta)$
01	ب) لدينا مما سبق $v_n = z_n - \overline{z_n} = 2i\sin(\theta)$ لكن $z_n = \lvert z_n \rvert e^{i\theta\times(\frac{1}{2})^n}$ وبالتالي $z_n - \overline{z_n} = \lvert z_n \rvert (2i \times \sin(\theta \times (\frac{1}{2})^n)) = 2i \times \sin(\theta)$ اي $\lvert z_n \rvert (\sin(\frac{\theta}{2^n})) = \sin(\theta)$

حل التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x) = e^{x-2} - 1$ 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	↘ 0	↗

0.25

2) اشارة : $g(x) \geq 0$ 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 0.25

ب)

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$ 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

0.25

2) حساب المشتقة: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x) = 0$ 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

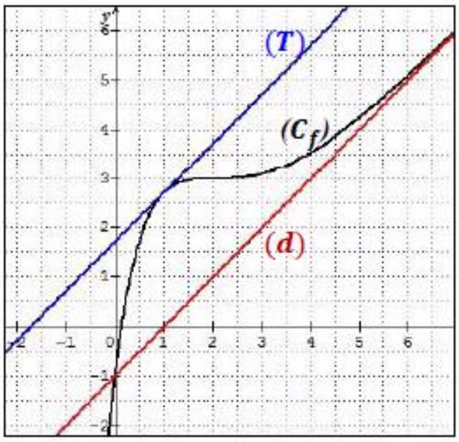
ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x) = 0$ 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$ 0.25

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي: 0.5

$y = x - 1 + e$ 0.25

5) التمثيل البياني 0.25



0.5 0.25 0.25

5) المناقشة البيانية: $f(x) = x + m$

$m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا

$m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم

$-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما 0.5

$m = e - 1$ حلا واحدا موجبا

$m = e - 1$ ليس لها حلول

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع :

$U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ 0.5

$H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$

ب) حساب A:

$$A = \int_0^2 (f(x) - y)dx$$

$$A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 xe^{2-x}\, dx$$ 0.5

$$A = [H(x)]_0^2$$

$$A = H(2) - H(0)$$

$$A = (e^2 - 3)\ cm^2$$

الموضـــــــــــــــوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	1)أ) بواقي قسمة 3^n على 7 .		04 ن
	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} n= & 6k & 6k+1 & 6k+2 & 6k+3 & 6k+4 & 6k+5 \\ \hline 3^n\equiv & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{array}$	0.5 ن	
	ب) $2019\equiv 3[7]$ ومنه $2019^{6n+4}\equiv 4[7]$ $2017\equiv 1[7]$ ومنه $2017^{4n+2}\equiv 1[7]$		
	إذن $2\times 2019^{6n+4}+2017^{4n+2}\equiv 2[7]$.	0.5 ن	
	2) أ) $PGCD(343;648)=1$ و 1 يقسم 76 ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.	0.25 ن	
	ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E). $(x;y)=(648k+4;343k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.	0.75 ن	
	3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E).		
	أ) d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $343x-648y$ أي d يقسم 76 ومنه $d\in\{1;2;4;19;38;76\}$.	0.5 ن	
	ب) $d=76$ معناه $\begin{cases}648k+4\equiv 0[76]\\343k+2\equiv 0[76]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}40k+4\equiv 0[76]\\39k+2\equiv 0[76]\end{cases}$ و منه $k\equiv 74[76]$ أي $k\equiv 76\alpha+74$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$. ومنه $(x;y)=(49248\alpha+47956;26068\alpha+25384)$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.	0.5 ن	
	4) $\begin{cases}\lambda=\beta\times 7^3+7^2+\alpha\times 7+\beta\\\lambda=\alpha\times 5^4+5^3+\alpha\times 5^2+\alpha\times 5+\beta\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\lambda=344\beta+7\alpha+49\\\lambda=655\alpha+\beta+125\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$		
	أي $\begin{cases}343\beta-648\alpha=76\\0<\alpha<5\\0<\beta<5\end{cases}$ ومنه $(\alpha;\beta)=(2;4)$.	0.75 ن	
	كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 : $\lambda=1439=\overline{01355}^{6}$.	0.25 ن	
التمرين الثاني	1) $P(z)=z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(3-2\sqrt{3}\right)z+6$.	0.25 ن	05 ن
	أ) $P(-2)=0$.	0.5 ن	

		$P(z)=(z+2)(z^2-\sqrt{3}z+3)$. ب) $P(z)=0$ تكافئ $(z+2=0)$ أو $(z^2-\sqrt{3}z+3=0)$. $z+2=0$ يكافئ $z=-2$. $z^2-\sqrt{3}z+3=0$ $\Delta=-9=(3i)^2$ ، $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ و $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.	
	0.5 ن	مجموعة الحلول: $S=\left\{-2;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$	
	0.75 ن	2) $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$. أ) كتابة كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_C=2e^{\pi i}$.	
	0.25 ن	الاستنتاج: لدينا $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_B\rvert=2$ أي $OA=OB=OC=2$ ومنه النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 .	
	0.5 ن	ب) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n\in\mathbb{R}$ معناه $e^{2in\frac{\pi}{3}}\in\mathbb{R}$ ومنه $2n\frac{\pi}{3}=k\pi$ و منه $2n=3k$ ونجد $n=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$.	
	0.5 ن	ج) $\bar{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ معناه $z=ke^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\arg z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $[OE)$ باستثناء النقطة O حيث $z_E=-1+i\sqrt{3}$.	
	0.5 ن	3)أ) كتابة على الشكل الأسي العدد : $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$: $L=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$	
	0.25 ن	ب) لدينا $z_A-z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_C)$ ومنه A صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	
	0.5 ن	ج) طبيعة المثلث ABC : لدينا $\begin{cases}CB=CA\\(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ ومنه ABC متقايس الأضلاع .	
	0.5 ن	د) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه $z_D=z_C-z_B+z_A$ أي $z_D=-2+2i\sqrt{3}$.	

التمرين الثالث :	04.5 نقطة
لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$	
1) حساب u_2 ، u_1 و u_3 : لدينا : $u_1\times u_3=u_2^2$ لان u_2 هو الوسط الهندسي للحدين u_1 و u_3. ومنه : $u_2^2=256$ يكافئ $u_2=16$ أو $u_2=-16$ وبالتالي $u_2=16$ (لان حدود المتتالية موجبة)	
وبالتالي لدينا : $\begin{cases} u_1+32+u_3=100 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+u_3=68 \\ u_1\times u_3=256 \end{cases}$ إذن u_1 و u_3 هما حلي للمعادلة $x^2-68x+256=0$ حساب المميز $\Delta=(-68)^2-4\times256=3600$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{68-60}{2}=4$ و $x_1=\dfrac{68+60}{2}=64$	3×0.25
بما أن المتتالية متزايدة فان $u_1=4$ و $u_3=64$	
حساب الأساس q: $q=\dfrac{16}{4}=4$	0.25
2) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n: لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}=4\times4^{n-1}=4^n$ أي $u_n=4^n$	0.25
3) حساب كلا من المجموع : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ و الجداء $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ بدلالة n: لدينا : $S_n=u_1\times\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)=4\times\left(\dfrac{1-4^n}{1-4}\right)=-\dfrac{4}{3}\left(1-4^n\right)=\dfrac{4}{3}\times4^n-\dfrac{4}{3}$	
$S_n=\dfrac{4}{3}\times4^n-\dfrac{4}{3}$	0.5
▪ **حساب الجداء :** $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=4\times4^2\times\ldots\times4^n=4^{1+2+\ldots+n}$ أي $P_n=4^{\frac{n}{2}(1+n)}$	0.5
4) أ) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تبعا لقيم العدد الطبيعي n : لدينا : $7^0\equiv1[5]$ $7^1\equiv2[5]$ $7^2\equiv4[5]$ $7^3\equiv3[5]$ $7^4\equiv1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 5 تشكل متتالية دورية دورها $P=4$ من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :	2×0.5

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 7^n على 5	1	2	4	3

0.5	ب) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ على 5: لدينا : $2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{1436}\equiv 1^{1436}[5]$ أي $2016^{1436}\equiv 1[5]$ و $49^{2n+1}\equiv \left(7^2\right)^{2n+1}[5]$ ومنه $49^{2n+1}\equiv 7^{4n+2}[5]$ أي $49^{2n+1}\equiv 4[5]$ وكذلك لدينا : $5n-3\equiv -3[5]$ ومنه $5n-3\equiv 2[5]$ وبالتالي : $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 1+4+2[5]$ أي $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3\equiv 2[5]$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $2016^{1436}+49^{2n+1}+5n-3$ علي 5 هو 2
0.5	ج) حساب S_n' بدلالة n: $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\left[\ln 4+\ln 4^2+...+\ln 4^n\right]=\frac{1}{\ln 2}\ln\left(4\times 4^2\times...\times 4^n\right)$ أي $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times\ln P_n=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 4^{\frac{n}{2}(1+n)}=\frac{1}{\ln 2}\times\ln(4)^{\frac{1}{2}\times(n^2+n)}$ ومنه : $S_n'=\frac{1}{\ln 2}\times\left(n^2+n\right)\times\ln 2=n^2+n$ أي $S_n'=n^2+n$
0.25	▪ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$: $S_n'+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ يعني $n^2+n+4n^2+7^{4n}\equiv 0[5]$ ومنه $n+5n^2+1\equiv 0[5]$ أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$ وبالتالي $n\equiv 5\alpha+4\ ,\ (\alpha\in\mathbb{N})$

<table>
<tr><th>التنقيط</th><th>تصحيح التمرين الرابع (07 نقاط) الدوال</th></tr>
<tr><td>2x0.25
0.5
0.5
0.5
0.5</td><td>
-I
1- ا) حساب النهايات:
$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0, \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f_n(x)=+\infty$
ب) حساب المشتقة $f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$
لدينا المقدار $1+x+n>0$ لان $x>-1$ ومنه المشتقة سالبة تماما
ج)
<table>
<tr><td>x</td><td>-1 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'_n(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f_n(x)$</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
-2
بما ان جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة نضع $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ وبالتالي
$(1+x_0)(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)^2}=\frac{e^{-x_0}}{(1+x_0)}$ لكن $x\neq -1$ ومنه $x_0=0$ والنقطة هي $A(0,1)$
</td></tr>
</table>

-3

01 أ) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (c_1) و (c_2) :

$$f_1(x)-f_2(x)=$$

$$\frac{e^{-x}}{(1+x)}=\frac{e^{-x}}{(1+x)^2}\Leftrightarrow e^{-x}[\frac{x}{(1+x)^2}]$$

ومنه من اجل $x<0$ (c_2) فوق (c_1)

ومن اجل $x=0$ (c_2) و (c_1) منطبقان

ومن اجل $x>0$ (c_1)فوق (c_2)

0.5 ب)

II-

-1

0.5 **لدينا مما سبق**

$$f'_n(x)=\frac{-e^{-x}(1+x)^n-e^{-x}(n)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=\frac{-e^{-x}(1+x+n)}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f'_n(x)=-\frac{e^{-x}}{(1+x)^n}-\frac{ne^{-x}}{(1+x)^{n+1}}=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

$$f'_n(x)=-(f_n(x)+n\times f_{n+1}(x))$$

-2

0.25 أ) **لدينا** $I_{n+1}-I_n=\int_0^1[f_{n+1}(x)-f_n(x)]dx<0$ لان $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ من اجل $x>0$

0.25 **وبالتالي تكامل دالة سالبة هو عدد سالب ومنه** I_n متناقصة

ب) إستنتاج ان I_n متقاربة

-3

0.25 أ) $0\le x\le 1\Leftrightarrow e^{-1}\le e^{x}\le 1\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}\le f_n(x)\le \frac{1}{(1+x)^n}$

0.25	ب) مما سبق $$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{(1+x)^n}dx \le \int_0^1 f_n(x)dx \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n}dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1 \le I_n \le \frac{1}{1-n}[(1+x)^{1-n}]_0^1$$ $$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}] \le I_n \le \frac{1}{n-1}[1-\frac{1}{2^{n-1}}]$$
0.5	ج) بإستعمال الحصر نجد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ -4 أ)
0.5	$$f'_n(x) = -(f_n(x) + n\times f_{n+1}(x)) \Leftrightarrow \int_0^1 f'_n(x).dx = -\int_0^1 [f_n(x) + nf_{n+1}(x)]dx$$ $$\Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{2^n} - 1 = -(I_n + n.I_{n+1}) \Leftrightarrow I_n + n.I_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$$
0.25	ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} n.I_n = 1$
0.25	ج) حساب مساحة الحيز