المادة : الرياضيــات

المـدة : 03 سـا و 30 د

على المترشـح أن يختــار أحـد الموضوعيين التاليين :

الموضــوع الأول:

التمرين الأول : (04 نقـاط)

نعتبـر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدهـا الأول $u_0=4$ و من أجل كل عـدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{4}{3}$.

1) أحسب كلا من u_1, u_2 و u_3 ، ثم أعـط تخمينـا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعتبـر المتتالية (v_n) المعرفـة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\alpha u_n-4(\alpha+1)$ ، حيث α عـدد حقيقي .

أ. أوجد قيمة α حتى تكـون (v_n) متتاليـة هندسية أسـاسها $\frac{3}{4}$ ، ثم احسب حدهـا الأول .

ب. بين أنـه من أجل كل عـدد طبيعي n : $u_n=\frac{16}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متقاربـة .

جـ. أدرس اتجـاه تغيـر المتتالية (u_n) .

3) احسب بدلالة n المجمـوع S_n حيث : $S_n=v_0+\frac{4}{3}v_1+...+\left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} S_n$

التمرين الثـانـي : (04 نقـاط)

صندوق يحتوي على 8 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منهـا أربع كرات خضـراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 و ثلاث كرات بيضـاء تحمل الأرقام 0، 1، 2 و كرة واحـدة صفراء تحمل الرقم 1 .
نسحب عشوائيا من هذا الصنـدوق 3 كرات الواحـدة تلوى الأخرى دون إعـادة الكرة المسحوبة في كل مرة إلى الصنـدوق . نعتبـر الأحـداث التاليـة :

A : « سحب كرة واحـدة تحمل الرقم 1 » .

B : « سحب كرة بيضـاء في السحبـة الأولى » .

C : « سحب ثلاث كرات مجموع أرقامهـا 4 » .

1) احسب $P(A)$, $P(B)$ و $P(C)$.

2) بيــن أن : $P(A\cap B)=\frac{23}{160}$ ، ثم استنتج $P(A\cup B)$.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بنتيجـة كل سحب عـدد الأرقـام الزوجيـة المسحوبـة .

أ. عين قيم المتغيـر العشـوائي X ، ثم عرف قانون احتمالـه .

ب. احسـب $P(X^2-1\leq 0)$.

التمرين الثـالـث : (05 نقـاط)

I/ حـل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعـادلـة : $z^2-2z+4=0$. ، ثم استنتج حلـول المعـادلـة :
$\left(\bar{z}+2+2\sqrt{3}i\right)^2-2\bar{z}-4\sqrt{3}i=0$. ، حيث $\bar{z}$ مرافق z .

II/ z_0 و z_1 عددان مركبـان حيث : $z_0=1+i$ و $z_0\times z_1=2\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$.

1) عين طويلـة وعمـدة كل من z_0 و z_1 .

2) أكتب على الشكل الجبـري لـ : $z_0\times z_1$.

3) استنتج القيمة المضبـوطـة لكل من $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$.

4) كيف يمكن اختيـار العـدد الطبيعي n حتى يكون العـدد $(z_0\times z_1)^n$ حقيقيــا .

5) عين (Γ) مجموعـة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z ($z\neq z_0$ و $z\neq z_1$) حيث :

$\arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)=2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$.

III/ k عـدد حقيقي و z عدد مركب حيث : $z=(k-1)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

■ نـاقش حسب قيم العّـدد الحقيقي k طويلـة و عمـدة العدد المركب z .

<u>التمرين الرابـــع :</u> (07 نقـاط)

I/ g الدالـة العددية المعرفـة على المجال $]-1,+\infty[$ بــ : $g(x)=\frac{2x^2+3x+2}{x+1}$

*تحـقق أنـه من أجل كل x من $]-1,+\infty[$: $g(x)\succ 0$.

II/ f الدالـة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بــ : $f(x)=x^2+x+1+\ln(1+x)$.

و (C_f) تمثيـلـهـا البيـانـي فـي المستوي المنسوب إلى م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) <u>أ</u> احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و فسـر النتيجة هندسيــــا ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>ب</u> أدرس اتجـاه تغير الدالة f ، ثم شكـل جـدول تغيراتهـــا .

1) بين أن المعـادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيـدا α يحقق : $-0.53\prec\alpha\prec-0.52$.

2) <u>أ</u> بين أنـه من أجل كل $x\succ 0$: $f(x)\geq x+1$ ، ثم أعّط تفسيرا هندسيـــا للنتيجـة .

<u>ب</u> بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-0.81\prec\beta\prec-0.80$ ، ثم أعّط تفسيرا هنـدسيا للنتيجـة .

3) عيـن النقط من (C_f) التي تكون عنـدهـا المماســات موازيـة للمستقيم (Δ) ذو المعـادلـة $y=2x$ ، ثم عين معــادلـة لكل من هذه المماســات .

4) أرسم على المجـال $]-1,2]$ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و الممـاسـات .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي k $(k\leq 3+\ln 3)$ عـدد حلول المعادلـة :

$$x^2-x+1+\ln(x+1)=k \quad .$$

II/ h الدالـة المعرفـة على $\mathbb{R}$ بــ : $h[f(x)]=-x$ ، و (C_h) تمثيـلهـا البيــانـي .

1) بين أن: $h'(\beta)=\frac{-\beta-1}{2\beta^2+3\beta+2}$. و مــاذا تستنتج بالنسبــة لمماسي (C_f) و (C_h) عنـد النقطتين اللتين فاصلتيهمــا β .

2) M و M' نقطتـان من (C_f) و (C_h) على الترتيب فاصلتيهمـا β .

■ بين أن المسـاحـة S للمثلث OMM' هي : $S=\beta^2$.

الموضـــوع الثـــانـــي :

التمرين الأول : (04 نقاط)

I/ أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحـــالات الثلاث التـاليـــة :

1) (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^2$ وحدها الأول $u_0=e^{\frac{1}{3}}$، (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n=\ln(u_n)$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $s=v_0+v_1+...+v_n$ ومنه : $s=\frac{1}{3}\times\frac{1-e^{n+1}}{1-e^2}$

2) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n+1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

■ المتتالية (v_n) هندسية و نهاية المتتالية (u_n) هي : $-\frac{1}{2}$

II/ لتكن المتتالية (u_n) المعرفـة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n}$.

1) احسب u_1 .

2) برهن بالتراجـع أنـه من أجل كل عـدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^n}{1+2^n}$

3) بين أن المتتالية (u_n) متقـــاربـــة .

التمرين الثـــاني : (04 نقاط)

I/ يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ثلاثة منها زرقاء تحمل الأرقام $2,1,0$ و أربع كريات حمراء تحمل الأرقام $-3,2,1,0$ و ثلاثة كريات خضراء تحمل الأرقام $4,2,1$ نسحب عشوائيا و في آن واحـــد ثلاث كريات من الكيس .

1) أحسب احتمـال الأحـداث التـاليـة : A : « سحب ثلاث كريات من نفس اللون» .

B : « سحب ثلاث كريات تحمل أرقاما تشكل حدودا من متتالية حسابية »

C : « مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم»

2) أحسب $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ و $P(A\cap B)$ ثم أحسب: $P(\overline{A\cup B})$

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المسحوبة.

أ - عـرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أملـه الريـاضيـاتي $E(X)$.

ب- أحسب احتمال تحقق الحدث « $e^{X^2-2X}=1$ »

التمرين الثـالـث : (05 نقاط)

المستـوي المركب منسـوب إلى المعلـم المتعامد و المتجـانس $(o,\vec{u},\vec{v})$.

f دالـة معرفـة بـ : $f(z)=z+\frac{1}{z}$ حيث z لاحقـة النقطـة M و العدد المركب $f(z)$ لاحقـة النقطة M' .

1) A نقطـة من المستـوي المركب لاحقتهـا $z_A=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

أ. أكتب z_A على الشكل الأسـي . ب. أكتب $f(z_A)$ على الشكل الجبـري .

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}^*$ المعـادلـة : . $f(z)=1$ ، ثم أكتب الحلـول على الشكل الأسـي .

3) B نقطة من المستـوي المركب لاحقتهـا $z_B=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، و D نقطـة لاحقتهـا $z_D=\overline{z_B}$،

أ. بين أن النقط A ,B و D تنتمـي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزهـا و نصف قطرهـا .

ب. بين أنـه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_B^n+z_D^n=\lambda\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ ،حيث λ عـدد طبيعي يطلب تعيينــه ، ثم عين قيـم العـدد الطبيعي n بحيـث يكـون $z_B^n+z_D^n-1=0$.

4) عين (γ) مجموعـة النقط M من المستـوي ذات اللاحقـة z حيث :

$$\arg(z_B.z)-\arg(\overline{z})=2\pi k \quad / k\in\mathbb{Z}$$

التمرين الرابــع : (07 نقـاط)

I/ لتكن g الدالـة العددية المعرفـة على $]0;+\infty[$ بــ : $g(x)=x^2-2+\ln(x)$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجـاه تغير الدالـة g ، ثـم شكـل جدول تغيـراتهـا .

3) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.31\prec\alpha\prec 1.32$

ب- عين اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ج-بين أن : $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$

II/ f الدالـة العدديــة المعرفـة على $]0;+\infty[$ بــ : $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

ولتكن f' دالتها المشتقة على المجال $]0;+\infty[$

أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و أستنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

III/ المستوي المنسوب إلى م. م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$ ،ليكن (Γ) هو التمثيل البياني للدالة دالة اللوغاريتم النيبيري

لتكن A النقطة التي احداثييها $A(0;2)$ و M النقطة من المنحني (Γ) ذات الفاصلة x على $]0;+\infty[$

1) بين أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM=\sqrt{f(x)}$

2) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\sqrt{f(x)}$

أ- بين أن للدالتين f و h نفس التغيرات على المجال $]0;+\infty[$

ب-بين أن المسافة AM تكون أصغرية عند نقطة من (Γ) ولتكن P يطلب تعيين احداثييها

ج- بين أن : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

انتهى

**** بالتوفيق البكالوريا ****

التمرين الأول:

حساب الحدود:

$U_0=4 \quad U_1=\frac{13}{3} \quad U_2=\frac{55}{12} \quad U_3=\frac{229}{48}$

التخمين:

$U_0<U_1<U_2<U_3$ المتتالية (U_n) متزايدة

$$V_n=\alpha U_n-4(\alpha+1)$$

إيجاد قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية

0,75

$$V_{n+1}=\alpha U_{n+1}-4(\alpha+1)$$
$$=\alpha\left(\frac{3}{4}U_n+\frac{4}{3}\right)-4(\alpha+1)$$
$$=\frac{3}{4}\alpha U_n+\frac{4}{3}\alpha-4\alpha-4$$
$$=\frac{3}{4}\alpha U_n-\frac{8}{3}\alpha-4$$
$$=\frac{3}{4}\left[\alpha U_n-\frac{32\alpha}{9}-\frac{16}{3}\right]$$
$$=\frac{3}{4}\left[\underbrace{\alpha U_n-4\left(\frac{8}{9}\alpha+\frac{4}{3}\right)}_{V_n}\right]$$

بالمطابقة

$$\frac{8}{9}\alpha+\frac{4}{3}=\alpha+1$$
$$\frac{8}{9}\alpha-\alpha=1-\frac{4}{3}$$
$$-\frac{\alpha}{9}=\frac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{\alpha=3}$$

حساب V_0:

$$V_n=3U_n-4(3+1)$$

0,25

$$\boxed{V_n=3U_n-16}$$

$V_0=3U_0-16=-4$ $\quad\boxed{V_0=-4}$

عبارة V_n:

$$V_n=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

عبارة U_n:

0,25

$$V_n=3U_n-16$$
$$V_n+16=3U_n$$
$$\boxed{U_n=\frac{1}{3}V_n+\frac{16}{3}}$$

بالتعويض بعبارة V_n نجد:

$$U_n=\frac{1}{3}\left[-4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]+\frac{16}{3}$$

0,25

$$=\frac{-4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{16}{3}$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\frac{3^n}{4^n}$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{3^{-1}}{4^{-1}}\frac{3^n}{4^n}$$
$$\boxed{U_n=\frac{16}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$

إثبات أن (U_n) متقاربة:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]=\boxed{\frac{16}{3}}$$

لأن $\boxed{-1<\frac{3}{4}<1}$ ومنه (U_n) متقاربة إلى $\frac{16}{3}$.

اتجاه تغير (U_n): الدالة المعرفة بالمتتالية (U_n) المعرفة بـ:

0,5

$$x\longmapsto\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}$$

متزايدة تماما إذن (U_n) رتيبة وبما أن $U_0<U_1$ فإن (U_n) متزايدة تماما.

" يمكن حساب الفرق $U_{n+1}-U_n$ ".

حساب S_n:

0,75

$$S_n=V_0+\frac{4}{3}V_1+\cdots+\left(\frac{4}{3}\right)^nV_n$$
$$=\left(\frac{4}{3}\right)^0V_0+\left(\frac{4}{3}\right)^1V_1+\cdots+\left(\frac{4}{3}\right)^nV_n$$

لدينا

$$\left(\frac{4}{3}\right)^nV_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times\left[-4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$
$$=-4\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{-n}\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{1}$$
$$=-4$$

إذن :

$$S_n = \underbrace{(-4)+(-4)+\dots+(-4)}_{n+1 \text{ مرة}}$$

0,25 $$S_n = -4(n+1) = \boxed{-4n-4}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty}$$

ومنه S_n متباعدة.

التمرين الثاني:

نسحب 3 كرات دون إرجاع من 8 إذن عدد الحالات الممكنة هو: $A_8^3 = 336$.

4V	3B	1J
1 1 1 2	0 2 1	1

0,25 A سحب كرة واحدة تحمل الرقم 1

$1\ \bar{1}\ \bar{1}$ $\quad \alpha = \frac{3!}{1!2!} = 3$

$$P(A) = \frac{3A_5^1A_3^2}{336} = \boxed{\frac{90}{336}}$$

0,25 B سحب كرة بيضاء في السحبة الأولى

$BBB \quad B\bar{B}\bar{B} \quad BB\bar{B} \quad B\bar{B}B$.

$$P(B) = \frac{A_3^3 + A_3^1A_5^2 + A_3^2A_5^1 + A_3^2A_5^1}{336}$$

$$= \frac{126}{336} \quad \boxed{\frac{96}{336}}$$

0,25 C سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها 4

$112 \quad 220 \quad \alpha = \frac{3!}{2!1!} = 3$

$$P(C) = \frac{3A_5^2A_2^1 + 3A_2^2A_1^1}{336} = \boxed{\frac{126}{336}}$$

0,25 "$A\cap B$" كرة بيضاء في السحبة الأولى و واحدة فقط تحمل الرقم 1

$$P(A\cap B) = \frac{A_1^1A_3^1A_2^1 + 2A_2^1A_5^1A_2^1}{336} = \frac{46}{336}$$

$$= \boxed{\frac{23}{168}}$$

الجدول التالي يوضح الوضعية أكثر:

السحبة 1	السحبة 2	السحبة 3
بيضاء وتحمل الرقم 1 — كرة واحدة	لا تحمل الرقم 1 — 3 كرات	لا تحمل الرقم 1 — تبقى 2 كرات
بيضاء ولا تحمل الرقم 1. — كرتين	تحمل الرقم 1 — 5 كرات	لا تحمل الرقم 1 — تبقى 2 كرات

2X

استنتاج $P(A\cup B)$ =

0,25 $$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= \frac{90+96-46}{336}$$

$$= \boxed{\frac{140}{336}}.$$

المتغير العشوائي:

زوجية	فردية
0 2 2	1 1 1 1 1

يمكن سحب 3، 2، 1 أو 0 كرة تحمل رقم زوجي إذن:

$$X = \{0;1;2;3\}.$$

$$P(X) = \frac{A_5^3}{336} = \frac{60}{336}$$

1 $$P(X=1) = \frac{3A_3^1A_5^2}{336} = \frac{180}{336}$$

$$P(X=2) = \frac{3A_3^2A_5^1}{336} = \frac{90}{336}$$

$$P(X=3) = \frac{A_3^3}{336} = \frac{6}{336}$$

X_i	0	1	2	3
P_i	60/336	180/336	90/336	6/336

قيم X التي تحقق المتراجحة $X^2-1\leq 0$ هي $X=0$ أو $X=1$ إذن:

0,25 $$P(X^2-1\leq 0) = P(X=0)+P(X=1) = \frac{60}{336}+\frac{180}{336}$$

$$= \boxed{\frac{240}{336}}$$

التمرين الثالث:

$z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(4) = 4 - 16 = -12$

$\Delta = (2i\sqrt{3})^2$

0.5

$z_1 = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = \boxed{1 - i\sqrt{3}}$

$z_2 = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$

استنتاج حلول المعادلة:

$(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\overline{z} - 4\sqrt{3}i = 0$

بإدخال المرافق على الطرفين:

$\overline{(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\overline{z} - 4\sqrt{3}i} = \overline{0}$

$\overline{(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)}^2 - \overline{2\overline{z}} - \overline{4\sqrt{3}i} = 0$

$(z + 2 - 2\sqrt{3}i)^2 - 2z + 4\sqrt{3}i = 0$

$(z + 2 - 2\sqrt{3}i)^2 - 2z + 4\sqrt{3}i + 4 - 4 = 0$

$(z + 2 - 2\sqrt{3}i)^2 - 2(z + 2 - 2\sqrt{3}i) + 4 = 0$

ليكن العدد المركب T، نضع:

$\boxed{T = z + 2 - 2\sqrt{3}i}$

المعادلة تصبح:

$\boxed{T^2 - 2T + 4 = 0 \ / \ T \in \mathbb{C}}$

مكافئة للمعادلة الأولى إذن الحلول هي:

$T = 1 - i\sqrt{3}$ أو $T = 1 + i\sqrt{3}$

بالعودة لـ z نجد:

$$\begin{cases} 1 - i\sqrt{3} = z + 2 - 2\sqrt{3}i \\ 1 + i\sqrt{3} = z + 2 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$
أو

تكافئ:

$$\begin{cases} \boxed{z = -1 + i\sqrt{3}} \\ \boxed{z = -1 + 3i\sqrt{3}} \end{cases}$$
أو

طريقة 2: دون نزع المرافق:

$(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2\overline{z} - 4\sqrt{3}i = 0$

$(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i)^2 - 2(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i) + 4 = 0$

بوضع $T = \overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i$

تصبح: $T^2 - 2T + 4 = 0$

مكافئة للمعادلة (1) إذن:

$T_1 = 1 - i\sqrt{3}$ أو $T_2 = 1 + i\sqrt{3}$

ومنه:

$$\begin{cases} \overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i = 1 - i\sqrt{3} \\ \overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$
أو

تكافئ:

$$\begin{cases} \overline{z} = -1 - 3i\sqrt{3} \\ \overline{z} = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه:

0.5

$$\begin{cases} \boxed{z = -1 + 3i\sqrt{3}} \\ \boxed{z = -1 + i\sqrt{3}} \end{cases}$$
أو

طويلة وعمدة لـ z_0 و z_1:

0.5

$|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$

$\boxed{Arg(z_0) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$

لدينا: $z_0 \times z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$

$|z_0 \times z_1| = 2\sqrt{2}$ $\quad |z_1| = \dfrac{2\sqrt{2}}{|z_0|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

$\boxed{|z_1| = 2}$

0.5

$Arg(z_0 \times z_1) = Arg(z_0) + Arg(z_1) = \dfrac{19\pi}{12}$

$Arg(z_1) = \dfrac{19\pi}{12} - Arg(z_0)$

$Arg(z_1) = \dfrac{19\pi}{12} - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\boxed{Arg(z_1) = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi}$

② كتابة $z_0 \times z_1$ على الشكل الجبري

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{z_0=1+i}$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{z_1=-1-i\sqrt{3}}$$

$$z_0z_1=(1+i)(-1-i\sqrt{3})$$
$$=-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}$$
$$=(\sqrt{3}-1)+i(-1-\sqrt{3})$$

③ الصيغة المضبوطة:

$$z_0z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{19\pi}{12}+i\,2\sqrt{2}\sin\frac{19\pi}{12}$$
$$=(\sqrt{3}-1)+i(-\sqrt{3}-1).$$

إذن:

$$\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{19\pi}{12}=\sqrt{3}-1 \\ \text{و} \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{19\pi}{12}=-\sqrt{3}-1\end{cases}$$

إذن:

$$\begin{cases}\cos\frac{19\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \text{و} \\ \sin\frac{19\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

④ تعيين قيمة n:

$$(z_0\times z_1)^n=(2\sqrt{2})^n e^{i\frac{19\pi}{12}n}$$

$(z_0\times z_1)^n$ حقيقي معناه

$$Arg(z_0\times z_1)^n=k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}.$$

أي: $\frac{19\pi}{12}n=k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}.$

أي: $\frac{19}{12}n=k \ / \ k\in\mathbb{Z}$

حتى يكون العدد $\frac{19}{12}n$ صحيح يجب أن تكون n من مضاعفات العدد 12. إذن:

$$\boxed{n=12.k' \ / \ k'\in\mathbb{N}}$$

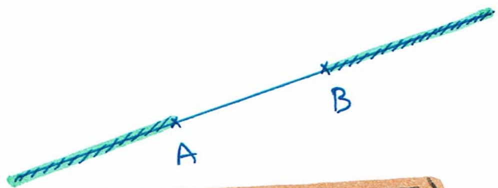
⑤ مجموعة النقط:

$$Arg\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)=2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}$$

لتكن z_0 لاحقة نقطة A.
z_1 لاحقة نقطة B.

$$Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=2k\pi$$

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) عدا القطعة المغلقة $[AB]$.



III

$$z=(k-1)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

نعلم أن:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}$$

إذن:

$$z=(k-1)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

k	$-\infty$	1	$+\infty$
k-1	−	0	+
الطويلة وعمدة z	طويلة z هي $1-k$ وعمدة $\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$	z معدوم طويلة 0 وليس له عمدة	طويلة z هي $k-1$ وعمدة $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

شرح حالة $k-1<0$:

$$z=(k-1)e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=-(1-k)e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=(1-k)e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=(1-k)e^{i(\pi-\frac{\pi}{4})}$$

نعلم أن: $-1=e^{i\pi}$

التمرين الرابع :

0,25

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x^2+3x+2$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$+$	

$f(x) = x^2+x+1 + \ln(1+x)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln(x+1) = -\infty \end{cases}$

0,25

التفسير :

المستقيم ذي المعادلة $x=-1$
هو مقارب مواز لحامل محور التراتيب

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2+x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$

دراسة إتجاه تغير الدالة f :

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق
على المجال $]-1;+\infty[$ ودالتها
المشتقة معرفة بـ :

0,25

$f'(x) = 2x+1 + \dfrac{1}{x+1}$

$= \dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$

$= g(x)$

مما سبق $g(x)>0$ من أجل $x>-1$
إذن الدالة f متزايدة تماما
على مجموعة تعريفها .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

إثبات أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

من جدول التغيرات f متزايدة تماما
ومستمرة على المجال $]-0,53;-0,52[$

0,5

و 0 محصور بين
$f(-0,53) =$
و
$f(-0,52) =$
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة
للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال
$]-0,53;-0,52[$ أي

$\boxed{f(\alpha)=0}$

إثبات أن $f(x) \geq x+1$ على المجال $[0;+\infty[$

$f(x)-(x+1) = x^2+x+1+\ln(1+x)-x-1$

$= x^2+\ln(1+x)$

من أجل $x>0$ فإن $x+1>1$ أي

0,5

$\ln(x+1) > \ln 1$

$\ln(x+1) > 0$

مجموع عددين موجبين x^2 و $\ln(1+x)$
عدد موجب إذن $f(x)-(x+1)>0$ ومنه

$f(x) > x+1$

التفسير :

(C_f) يقع فوق المستقيم الذي
معادلته $y=x+1$.

إثبات أن $f(x)=x$ تقبل حل وحيد β :

المعادلة $f(x)=x$ تكافئ : $f(x)-x=0$

1 لندرس إتجاه تغير الدالة $x \mapsto f(x)-x$

$f(x)-x = x^2+1+\ln(1+x)$.

المشتقة : $x \mapsto 2x + \dfrac{1}{1+x}$

$= \dfrac{2x(x+1)+1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x+1}{x+1} > 0$

إذن الدالة $x \mapsto f(x)-x$ متزايدة تماما
على المجال $]-1;+\infty[$

الدالة $x \mapsto f(x)-x$ متزايدة
تماما ومستمرة على المجال
$]-0,81;-0,80[$ ولدينا
0 محصور بين:
$f(-0,81)+0,81 =$
و
$f(-0,80)+0,80 =$
إذن حسب مبرهنة القيم
المتوسطة المعادلة $f(x)-x=0$
تقبل حل وحيد β على المجال
$]-0,81;-0,80[$ أي $\boxed{f(\beta)=\beta}$

التفسير الهندسي:
(C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته
$y=x$ في نقطة وحيدة $(\beta;\beta)$.

ب- تعيين النقط:
نحل المعادلة $f'(x)=2$

$$\frac{2x^2+3x+2}{x+1}=2$$

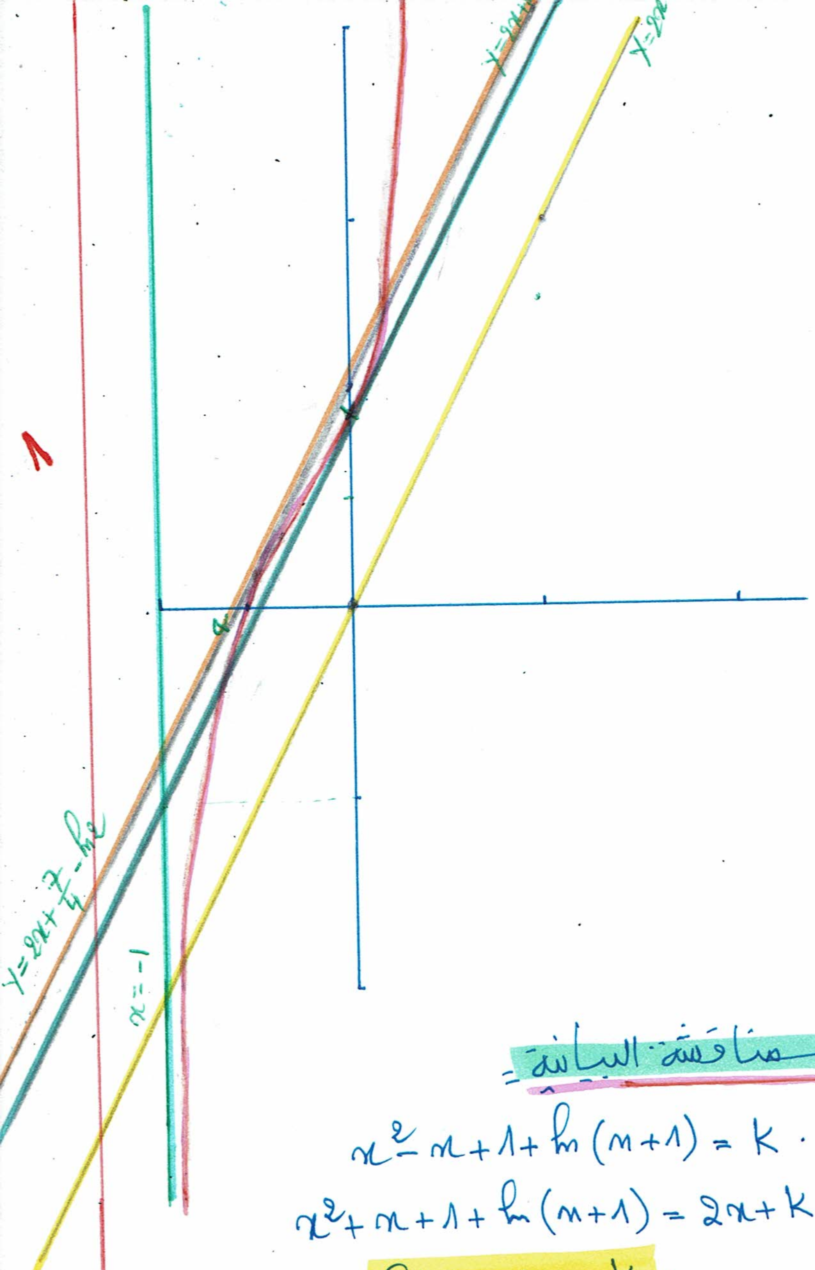
$$2x^2+3x+\cancel{2}=2x+\cancel{2}$$

$2x^2+x=0$ $\quad x(2x+1)=0$

$\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

عند 0 =:
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$\boxed{y=2x+1}$

عند $-\frac{1}{2}$ =:
$y=f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})$
$y=2(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}-\ln 2$
$\boxed{y=2x+\frac{7}{4}-\ln 2}$



المناقشة البيانية:
$x^2-x+1+\ln(x+1)=k$.
$x^2+x+1+\ln(x+1)=2x+k$.
$\boxed{f(x)=2x+k}$.
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع
(C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=2x+k$
مناقشة مائلة:

قيم k	عدد الحلول.
$]-\infty;1[$	حل وحيد.
$k=1$	حلان متمايزان أحدهما مضاعف.
$]1;\frac{7}{4}-\ln 2[$	ثلاث حلول مختلفة
$k=\frac{7}{4}-\ln 2$	حلان متمايزان أحدهما مضاعف.
$]\frac{7}{4}-\ln 2;7+\ln 3]$	حل وحيد.

II

$h(f(x)) = -x$

حساب $h'(\beta)$ =

لنشتق $h(f(x)) = -x$

$f'(x)\, h'(f(x)) = -1$

$f'(\beta)\, h'(f(\beta)) = -1$

بما أن $f(\beta) = \beta$

إذن = $f'(\beta) \times h'(\beta) = -1$

$f'(\beta)$ هو معامل توجيه مماس (C_f) عند β و $h'(\beta)$ هو معامل توجيه مماس (C_h) عند β.

جداؤهما يساوي -1 معناه = المستقيمان متعامدان. أي المماسين متعامدين.

2 -

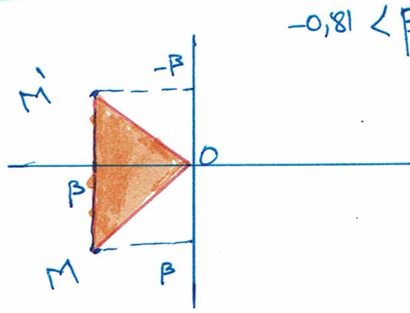
M نقطة من (C_f) معناه =

$M(\beta ; f(\beta)) \equiv M(\beta ; \beta)$

M نقطة من (C_h) معناه =

$M'(\beta ; h(\beta))$ أي $M'(\beta ; -\beta)$

$-0,81 < \beta < -0,80$



المثلث OMM' متساوي الساقين:

$S = \frac{1}{2}\, 2\beta \times \beta = \beta^2$

مساحة المثلث = $\frac{ع \times ق}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

-1 $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$= \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_n$

$= \ln(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n)$.

نعلم أن

$U_n = U_0 q^n = e^{\frac{1}{3}} e^{2n}$

ومنه: $\boxed{U_n = e^{2n+\frac{1}{3}}}$

$S_n = \ln\left[e^{2(0)+\frac{1}{3}} \times \dots \times e^{2n+\frac{1}{3}}\right]$

$= \ln\left[e^{2(0)+\frac{1}{3}+\dots+2(n)+\frac{1}{3}}\right]$

$= 2[0+1+\dots+n] + \frac{1}{3}(n+1)$

$= \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + \frac{1}{3}(n+1)$.

$= (n+1)\left(n+\frac{1}{3}\right)$.

إذن الإجابة خاطئة.

-2
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \\ V_n = U_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2}$

$= 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$

$= 3U_n + \frac{3}{2}$

$= 3\left[U_n + \frac{1}{2}\right]$.

$= 3V_n$.

(V_n) هندسية أساسها 3 حدها الأول

$V_0 = U_0 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

إذن: $\boxed{V_n = -\frac{1}{2}3^n}$

ولدينا: $U_n = V_n - \frac{1}{2}$

$\boxed{U_n = -\frac{1}{2}(3^n) - \frac{1}{2}}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ لأن $3 > 1$

إذن الإجابة خاطئة.

II -

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} \end{cases}$$

0,5 حساب U_1:

$U_1 = \frac{2U_0}{1+U_0} = \frac{2}{3}$.

البرهان بالتراجع:

نسمي الخاصية $P(n)$: $P(n): U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$

• لنتحقق من صحة $P(0)$:

$P(0): U_0 = \frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{2}$ (محققة)

• نفرض صحة $P(n)$ أي $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

نتحقق من صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$

1 لدينا: $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$

$= \frac{2\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)}{1+\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)}$

$= \frac{\frac{2\,2^n}{\cancel{1+2^n}}}{\frac{1+2^n+2^n}{\cancel{1+2^n}}}$

$= \frac{2^{n+1}}{1+2\,2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$

و-هـ-م

• $P(n+1)$ محققة حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة.

0,5 $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim \frac{2^n}{2^n+1} = \lim \frac{2^n(1)}{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\cancel{\frac{1}{2^n}}} = \boxed{1}$ (U_n) متقاربة نحو 1.

1

1

التمرين الثاني:

3B	4R	3V
1 0 2	1 0 -3 2	2 1 4

نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات

عدد الحالات الممكنة هو:

$C_{10}^{3} = 120$

0,5 $P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3}{120} = \boxed{\frac{6}{120}}$

"B" تشكل حدود من متتالية حسابية

أي الأساس ثابت:

0,5 إذن $(0;1;2)$ أو $(0;2;4)$

$P(B) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_3^1 + C_2^1 C_3^1 C_1^1}{120} = \boxed{\frac{24}{120}}$

"C" مجموع الأرقام معدوم:

$(1;2;-3)$

0,5 $P(C) = \frac{C_3^1 C_3^1 C_1^1}{120} = \boxed{\frac{9}{120}}$.

0,5 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{114}{120}$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{96}{120}$

"$A\cap B$" من نفس اللون و تشكل $(0;1;2)$

إذن: $B_0B_1B_2$ أو $R_0R_1R_2$

0,5 $P(A\cap B) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1 C_1^1}{120} = \boxed{\frac{2}{120}}$

0,25 $P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{28}{120} = \frac{92}{120}$

حيث:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{6+24-2}{120} = \frac{28}{120}$

3- المتغير العشوائي هو عدد الألوان المسحوبة

$X=3 \; \{BRV$

$X=1 \; \begin{cases} BBB \\ RRR \\ VVV \end{cases}$

$X=2 \; \begin{cases} BB\bar{B} \\ RR\bar{R} \\ VV\bar{V} \end{cases}$

$X = \{1;2;3\}$.

$P(X=1) = P(A) = \boxed{\frac{6}{120}}$

0,75 $P(X=3) = \frac{C_3^1 C_4^1 C_3^1}{120} = \boxed{\frac{36}{120}}$

$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^1 + C_4^2 C_6^1 + C_3^2 C_7^1}{120}$

$= \frac{21+36+21}{120} = \boxed{\frac{78}{120}}$

X_i	1	2	3
P_i	$\frac{6}{120}$	$\frac{78}{120}$	$\frac{36}{120}$

0,25 $E(X) = \frac{6+156+108}{120} = \frac{270}{120} = 2,25$.

قيم المتغير العشوائي التي تحقق المعادلة

$e^{x^2-2x} = 1$

0,25 هي: $X=2$ فقط إذن

$P(e^{X^2-2X} = 1) = P(X=2) = \frac{78}{120}$.

التمرين الثالث :

أ- كتابة z_A على الشكل الأسي :

الطويلة :

$$|z_A| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 .$$

عمدة لـ z_A :

0.5 $$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi .$$

$$z_A = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب- كتابة $f(z_A)$ على الشكل الجبري

$$f(z_A) = z_A + \frac{1}{z_A} = e^{i\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$= e^{+i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

0.5 $$= z_A + \overline{z_A}$$

$$= 2Re(z_A)$$

$$= 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-\sqrt{2}}$$

2- حل المعادلة $f(z)=1$:

$f(z)=1$ تكافئ :

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

بضرب طرفي المعادلة في z :

$$z^2 + 1 = z$$

أي

$$\boxed{z^2 - z + 1 = 0}$$

1 $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ إذن للمعادلة حلان مترافقان :

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} .$$

الشكل الأسي :

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

أ- إثبات أن النقط A, B, D تنتمي إلى نفس الدائرة .

لدينا : $|z_A| = 1$ و

$$|z_B| = |z_D| = 1 .$$

إذن :

0.5 $$|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_D - z_O|$$

أي :

$$OA = OB = OD$$

ومنه النقط A , B , D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

ب- تبيان أن : $z_B^n + z_D^n = \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$$z_B^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$z_D^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

0.5 $$z_B^n + z_D^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-i\frac{n\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{n\pi}{3}} + \overline{e^{i\frac{n\pi}{3}}}$$

$$= 2Re\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) .$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{3}$$

إذن $\boxed{\lambda = 2}$

و-هـ-م .

جـ- تعيين قيم n :

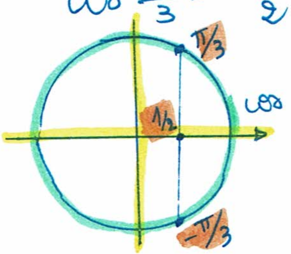
$$z_B^n + z_D^n - 1 = 0$$

تكافئ :

$$2\cos\frac{n\pi}{3} = 1$$

أي :

$$\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



0.5 ومنه :

$$\begin{cases} \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{n\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

تكافئ :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}n = \frac{1}{3} + 2k \\ \frac{1}{3}n = -\frac{1}{3} + 2k \end{cases} / k \in \mathbb{Z} .$$

إذن:

$$\begin{cases} n = 1+6k \\ n = -1+6k \end{cases} \quad / k\in\mathbb{Z}.$$

بما أن n عدد طبيعي:

$$\begin{cases} n = 1+6k \;/\; k\in\mathbb{N}. \\ n = -1+6k \;/\; k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$ أو

4- مجموعة النقط:

$$Arg(z_B \times z) - Arg(\bar{z}) = 2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}$$

$$Arg(z_B) + Arg(z) + Arg(z) = 2k\pi$$

0.5ن
$$\frac{\pi}{3} + 2Arg(z) = 2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}.$$

$$2Arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{Arg(z) = \frac{-\pi}{6} + k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}}$$

معناه:

$$(\vec{OI}\,;\vec{OM}) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi.$$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل النقطة O ويشكل زاوية قيسها $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ مع المحور الحقيقي " ميله $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ " بإستثناء النقطة O.

التمرين الرابع:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln(x).$$

النهايات:

0.5ن
$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 0} x^2-2 = -2. \\ \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

0.5ن
$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty \qquad \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x^2-2 = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

إتجاه التغير:

g دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

0.5ن
$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

$g'(x)>0$ إذن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

0.5ن

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

3-أ: من جدول التغيرات g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: 0 محصور بينا:

0.5ن
$f(1,31) = \dots$

و

$f(1,32) = \dots$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]1,31;1,32[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ج - بين أن $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$:

لدينا $g(\alpha)=0$ أي :

0,5 $\alpha^2+\ln(\alpha)-2=0$

و منه : $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$

II

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

حساب $f'(x)$:

0,5
$$f'(x)=2x+2\left(\frac{-1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=2x-2\,\frac{2-\ln x}{x}$$
$$=\frac{2[x^2-2+\ln x]}{x}$$
$$=\frac{2g(x)}{x}$$

تذكير: $[U^n]'=nU'U^{n-1}$

اتجاه تغير الدالة f :

من أجل x من $]0;+\infty[$ $x>0$

و :

0,5

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\alpha^4+\alpha^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\alpha)=\alpha^2+(2-\ln(\alpha))^2$$
$$=\alpha^2+(2-(2-\alpha^2))^2$$
$$=\alpha^2+(\cancel{2}-\cancel{2}+\alpha^2)^2$$
$$=\boxed{\alpha^2+\alpha^4}$$

III

(Γ) : $y=\ln(x)$.

$A(0;2)$ $M(x;\ln x)$.

1 - حساب AM :

0,5
$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}$$
$$=\sqrt{f(x)}$$

و.هـ.م.

2 - أ - لدينا : $h(x)=\sqrt{f(x)}$

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

0,25 إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(x)$ إذن للدالتين h و f نفس إتجاه التغير.

ب - لدينا : $AM=h(x)$

جدول تغيرات الدالة h :

0,5

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5 المسافة AM تكون أصغرية من أجل $x=\alpha$ و بما أن $M\in(\Gamma)$ فإن :

$$P(\alpha;\ln(\alpha))$$

جـ - :

0,25
$$AP=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}$$
$$=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}$$
$$=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

و.هـ.م