الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **ثانوية فارس بن مهل الشهبونية**

امتحان البكالوريا التجريبية — **دورة ماي 2015**

الشعبة : آداب وفلسفة + لغات أجنبية

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 02 ســـا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول(06 نقاط):

1. عيّن بواقي القسمة للعدد 2^n على 5 من أجل العدد الطبيعي n حيث : $n \in \{1;2;3,4\}$
2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2^{4n} \equiv 1[5]$
3. استنتج بواقي القسمة للأعداد 2^{4n+1} ; 2^{4n+2} ; 2^{4n+3} على 5.
4. عيّن باقي قسمة كل من 2^{1436} و 2^{2015} على 5 .
5. تحقق أن : $2017 \equiv 2[5]$ ثم استنتج باقي قسمة 2017^{2014} على 5.

التمرين الثاني (06 نقاط):

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

1. احسب كلا من u_3, u_2, u_1.
2. نضع $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ من اجل كل n من $\mathbb{N}$.
   - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الأساس و الحد الأول.
   - عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n.
3. احسب المجموع S_n بحيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثم استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$.

التمرين الثالث(08 نقاط):

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3+2x}{1-2x}$,

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .

3) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .

4) أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

5) أرسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (06 نقاط):

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N حيث : $U_6 = 448$ و $U_3 \times U_5 = 12544$

1) أحسب الحد U_4 ثم الأساس q لهذه المتتالية .
2) أحسب الحد الأول U_0 لهذه المتتالية .

* نضع : $U_0 = 7$ و $q = 2$

3) أكتب عبارة U_n بدلالة n.
4) بين أن 896 هو حد من حدود المتتالية (U_n) وحدد رتبته .
5) أحسب المجموع : $S = U_6 + U_7 + ... + U_n$

التمرين الثاني : (06 نقاط)

a , b و c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3 , باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6 .

1) عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين : $a \times b$, $a^2 - b^2$.

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n} \equiv 1[7]$.

ب/ تحقق أن $2015 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين :

2015^{2014} و 2015^{2015} على 7 .

التمرين الثالث :(08نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f واستنتج جدول تغيراتها .

2) أثبت أنه من أجل x من R : $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$

3) برهن أن النقطة A من المنحني التي فاصلتها $x = 0$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

4) تحقق من أن النقطة B التي إحداثيتها $(2;-4)$ هي نقطة من المنحني (C_f) ثم أوجد معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عندها .

5) أنشئ (C_f) و (Δ) في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

المستوى: 3 أف + 3 لغ

تصحيح البكالوريا التجريبي:

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

1- تعيين بواقي قسمة 2^n على 5:

$2^0\equiv1[5]$ ، $2^1\equiv2[5]$ ، $2^2\equiv4[5]$

$2^3\equiv3[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$

n من	4k	4k+1	4k+2	4k+3
البواقي	1	2	4	3

2- لدينا: $2^4\equiv1[5]$ ومنه $2^{4n}\equiv1[5]$

3- $2^{4n+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4n+2}\equiv4[5]$ ، $2^{4n+2}\equiv3[5]$

4- تعيين باقي قسمة كل من 2^{1436} و 2^{2015} على 5:

* لدينا: $1436=\underbrace{4\times359}_{4k}$

ومنه: $2^{1436}\equiv1[5]$ الباقي هو 1

* لدينا: $2015=\underbrace{4\times503+3}_{4k+3}$

ومنه: $2^{2015}\equiv3[5]$

أي: الباقي هو 3.

5- * لدينا: $2017-2=2015$

ولكن 2015 من مضاعفات 5

ومنه: $2017\equiv2[5]$

* لدينا: $2017\equiv2[5]$ ومنه $2017^{2014}\equiv2^{2014}[5]$

لكن $2^{2014}\equiv4[5]$ (لأن $\underbrace{2014=4\times503+2}_{4k+2}$)

أي: $2017^{2014}\equiv4[5]$ (خاصية التعدي)

التمرين الثاني:

$U_0=5$ ومن أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=3U_n+1$

1- $\boxed{U_1}=3U_0+1=15+1=\boxed{16}$

$\boxed{U_2}=3U_1+1=48+1=\boxed{49}$

$\boxed{U_3}=3U_2+1=147+1=\boxed{148}$

2- نضع من أجل $n\in\mathbb{N}$: $V_n=U_n+\frac{1}{2}$

أ-
$$V_{n+1}=U_{n+1}+\frac{1}{2}=3U_n+1+\frac{1}{2}=3U_n+\frac{3}{2}=3\Big(\underbrace{U_n+\frac{1}{2}}_{V_n}\Big)=3V_n$$

ومنه متتالية (V_n) هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول V_0 حيث:

$\boxed{V_0}=U_0+\frac{1}{2}=5+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{11}{2}}$

ب- تعيين عبارتي V_n و U_n بدلالة n:

* لدينا: $V_n=V_0\times q^n$

ومنه: $\boxed{V_n=\left(\frac{11}{2}\right)\times(3)^n}$

* لدينا: $V_n=U_n+\frac{1}{2}$ ومنه $U_n=V_n-\frac{1}{2}$

أي: $\boxed{U_n=\left(\frac{11}{2}\right)3^n-\frac{1}{2}}$

3-
$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_n=V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{11}{2}\left(\frac{1-(3)^{n+1}}{1-3}\right)$$

$\boxed{S_n=\frac{11}{4}\left(3^{n+1}-1\right)}$

$S'_n = U_0+U_1+\cdots+U_n$

$= \left(V_0-\frac{1}{2}\right)+\left(V_1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(V_n-\frac{1}{2}\right)$

$= \left(V_0+V_1+\cdots+V_n\right)-\frac{1}{2}(n+1)$

$= S_n-\frac{1}{2}(n+1)$

$= \frac{11}{4}\left(3^{n+1}-1\right)-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$

$$\boxed{S'_n=\frac{11\cdot 3^{n+1}}{4}-\frac{1}{2}n-\frac{13}{4}}$$

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{3+2x}{1-2x}$

1- دراسة تغيرات الدالة f:

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{+2x}{-2x}=-1$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^{>}} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^{<}} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		+	0	−	

f دالة قابلة للاشتقاق على مجالي التعريف ومنه:

$f'(x)=\frac{2(1-2x)+2(3+2x)}{(1-2x)^2}$

$f'(x)=\frac{2-\cancel{4x}+6+\cancel{4x}}{(1-2x)^2}=\frac{8}{(1-2x)^2}$

لدينا من أجل $x\in D_f$ يكون $f'(x)>0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على مجالي التعريف.

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$		$\nearrow +\infty$	‖	$\nearrow -1$	

2- المستقيمات المقاربة:

$\boxed{y=-1}$ معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الفواصل.

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$ معادلة لمستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور التراتيب.

3- f- التقاطع مع محور الفواصل:

$f(x)=0$ معناه $\begin{cases}3+2x=0\\ 1-2x\neq 0\end{cases}$

معناه $x=\frac{-3}{2}$ و $x\neq\frac{1}{2}$

ومنه نقطة التقاطع هي: $H\left(\frac{-3}{2},0\right)$.

ب- التقاطع مع محور التراتيب:

$f(0)=y$ ومنه $y=3$

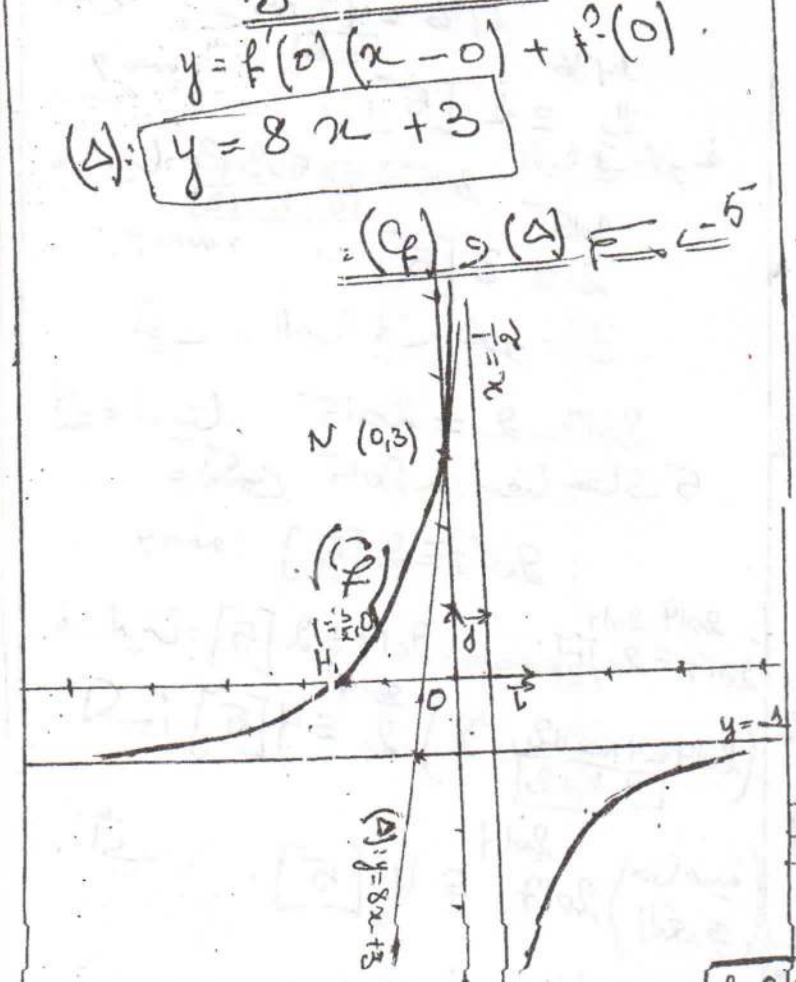
فنقطة التقاطع هي $N(0,3)$.

4- كتابة معادلة المماس:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

$(\Delta):\ \boxed{y=8x+3}$

5- رسم (Δ) و (C_f):



• الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

$U_6 = 448$ ، $U_3 \times U_5 = 12544$

1- حساب U_4: لدينا

$$U_4^2 = U_3 \times U_5 = 12544$$

ومنه $U_4 = \sqrt{12544}$

$$\boxed{U_4 = 112}$$

لدينا: $U_6 = U_4 \times q^2$

ومنه $q^2 = \frac{U_6}{U_4} = \frac{448}{112}$

$$\boxed{q^2 = 4}$$

أي $\boxed{q=2}$ أو $\boxed{q=-2}$ مرفوض

بما أن الحدود موجبة فإن $\boxed{q=2}$

2- حساب U_0:

لدينا: $U_4 = U_0 \times q^4$ ومنه $U_0 = \frac{U_4}{q^4}$

أي: $U_0 = \frac{112}{\underset{2^4}{16}} = 7$

نضع: $\boxed{U_0=7}$ و $\boxed{q=2}$

3- كتابة عبارة U_n بدلالة n:

لدينا: $U_n = U_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{U_n = 7 \times 2^n}$

4- اثبات أن 896 هو حد من حدود (U_n):

لدينا: $U_n = 896$ ومنه $7 \times 2^n = 896$

ومنه $2^n = \frac{896}{7}$

ومنه: $2^n = 128 = 2^7$

ومنه: $\boxed{n=7}$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$$

وبالتالي العدد 896 هو حد من حدود (U_n) رتبته 7.

5- حساب S_n:

$$S_n = U_6 + U_7 + \dots + U_n$$

$$= U_6 \left(\frac{1-q^{n-5}}{1-q}\right)$$

$$= 448\left(\frac{1-2^{n-5}}{1-2}\right)$$

$$\boxed{S_n = 448\left(2^{n-5}-1\right)}$$

التمرين الثاني: لدينا:

$a \equiv 3[7]$ ، $b \equiv 4[7]$ ، $c \equiv 6[7]$

1- *تعيين باقي القسمة لـ $a \times b$ على 7:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[7] \\ b \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $a \times b \equiv \overset{3\times 4}{12}[7]$

لكن: $12 \equiv 5[7]$

أي: $\boxed{a \times b \equiv 5[7]}$

* تعيين باقي القسمة لـ $a^2 - b^2$ على 7:

لدينا: $\begin{cases} a \equiv 3[7] \\ b \equiv 4[7] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a^2 \equiv 9[7] \\ b^2 \equiv 16[7] \end{cases}$

ومنه: $a^2 - b^2 \equiv \underset{-5}{\boxed{9-16}}[7]$

لكن $-5 \equiv 2[7]$

ومنه: $\boxed{a^2 - b^2 \equiv 2[7]}$

2- أ) لدينا: $c \equiv 6[7]$ ومنه $c^2 \equiv 1[7]$

أي: $\boxed{c^{2n} \equiv 1[7]}$

ب- لدينا $2015-6=2009$

لكن 2009 من مضاعفات العدد 7

ومنه: $\boxed{2015 \equiv 6\,[7]}$.

تعيين بواقي القسمة للعدد 6^n على 7:

$6^0\equiv 1\,[7]$ ، $6^1\equiv 6\,[7]$ ، $6^2\equiv 1\,[7]$

لما $n=2k$ فإن الباقي هو 1

لما $n=2k+1$ فإن الباقي هو 6.

لدينا: * $2015\equiv 6\,[7]$ ومنه: $2015^{2014}\equiv 6^{2014}\,[7]$

لكن $6^{2014}\equiv 1\,[7]$ $(2014=2\times 1007)$

أي: $\boxed{2015^{2014}\equiv 1\,[7]}$

لدينا: * $2015\equiv 6\,[7]$ ومنه $2015^{2015}\equiv 6^{2015}\,[7]$

لكن $6^{2015}\equiv 6\,[7]$

أي: $\boxed{2015^{2015}\equiv 6\,[7]}$.

التمرين الثالث:

$f(x)=-x^3+3x-2$

$D_f=\mathbb{R}$

1) أ- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$

ب- دراسة اتجاه التغير:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x^2-1)$

$f'(x)=0$ معناه $x^2-1=0$

معناه $x^2=1$

معناه $x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)=-4$	↗	$f(1)=0$	↘	$-\infty$

2) $-(x-1)^2(x+2)=f(x)$ (النشر والتبسيط).

3) f' دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه:

$f''(x)=-6x$

$f''(x)=0$ معناه $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه $A(0,-2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

4) لدينا: $f(2)=-4$

ومنه $B(2,-4)$ نقطة من (C_f):

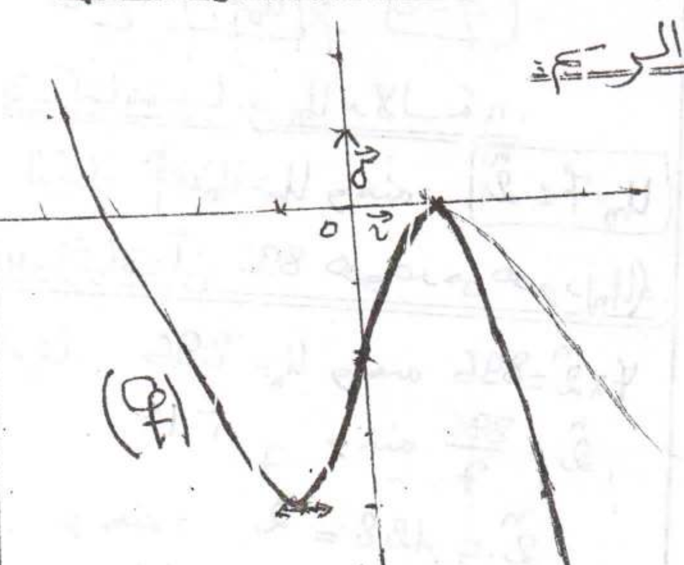
كتابة معادلة المماس عند B:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$=-9x+18-4$

$\boxed{(\Delta):\ y=-9x+14}$

5- الرسم:



موفقون إن شاء الله