وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: تقني رياضياتي

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات
دورة: 2019

امتحان في مادة: الرياضيات
المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ المعرفة بـ: $\mathcal{U}_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $\mathcal{U}_{n+1} = \sqrt{2\mathcal{U}_n}$

1) الجدول التالي يعطي قيم تقريبية لبعض حدود المتتالية $(\mathcal{U}_n)$

n	1	5	10	15	20
$\mathcal{U}_n$	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

أ) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ وتقاربها

2)

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < \mathcal{U}_n \leq 2$

ب) عين اتجاه تغير المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ على $\mathbb{N}$

ج) برهن أن المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نعتبر المتتالية $(\mathcal{V}_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\mathcal{V}_n = ln(\mathcal{U}_n) - ln\,2$

أ) برهن أن $(\mathcal{V}_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عين حدها الأول.

ب) أكتب عبارة الحد العام $\mathcal{V}_n$ بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام $\mathcal{U}_n$ بدلالة n

ج) عين نهاية المتتالية: $(\mathcal{U}_n)$

ح) أحسب بدلالة n المجموع $\mathcal{S}_n$ حيث: $\mathcal{S}_n = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

تحتوي علبة على 7 كرات لا نفرق بينها باللمس 4 منها تحمل الرقم 1 و كرتان تحملان الرقم 2 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 .

نسحب ثلاث كرات في آن واحد

1) أحسب احتمال الحوادث التالية

أ) A : "الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم"

ب) B : "يوجد في الكرات المسحوبة الرقم 0"

ت) C : "مجموع الارقام المسحوبة يساوي 3"

2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية السحب مجموع الأرقام المسحوبة

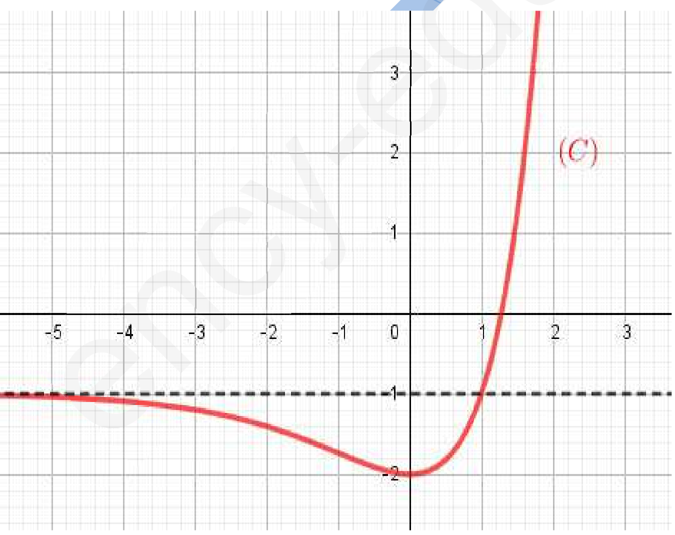
أ) أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

3) نسحب الآن من الكيس ثلاث كرات على التوالي و دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس و نسجل بالأرقام عددا طبيعيا رقم آحاده هو الرقم المسحوب ثالثا و رقم عشراته هو الرقم المسحوب ثانيا و رقم مئاته هو الرقم المسحوب أولا.

أ) أحسب احتمال الحصول على رقم زوجي. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

ب) أحسب احتمال الحصول على رقم يقبل القسمة على 5

التمرين الثالث: (07 نقاط)



I. في الشكل المقابل (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x + c$ حيث: a و b و c أعداد حقيقية

1) بقراءة بيانية:

أ) عين $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ ثم استنتج قيمة c

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$

ت) عين كلا من $g(0)$ $g'(0)$ ثم استنتج قيمتي كلا من a و b

2) نفرض فيما يأتي: $g(x)=(x-1)e^{x}-1$

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين $1{,}2$ و $1{,}3$

- استنتج إشارة $g(x)$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x}{e^{x}+1}$ و ليكن $\left(\mathcal{C}_f\right)$ تمثيلها البياني في م.م.م.م

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل لـ: $\left(\mathcal{C}_f\right)$ بجوار $+\infty$. ثم ادرس الوضعية النسبية بين $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و (Δ)

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها (لاحظ أن: $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^{x}+1)^2}$)

4) بين أن: $f(\alpha)=\alpha-1$ ثم استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=f(m)$

التمرين الرابع: (04 نقاط)

I. a عدد طبيعي حيث: $a>5$. نضع: $N_a=4a^5+2a^3+a+3$

1) أكتب العدد N_a في النظام ذي الأساس a .

2) نفرض: $a=7$ أكتب N_a في النظام ذي الأساس 9

II.

1) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13

- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العددان: $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبلان القسمة على 13

2) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13

- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2005^{2012} على 13

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$

أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 في الحالتين: $p=3n$ ثم $p=3n+2$

ب) برهن أنه إذا كان: $p=3n+1$ فإن العدد A_p يقبل القسمة على 13

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 3 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (05 نقاط)

المنحني $(\mathcal{C}_f)$ المقابل هو التمثيل البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

للدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + ln(1+x^2)$.

$(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل فقط عند المبدأ O

1) بقراءة بيانية بين أنه من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $ln(1+x^2) \leq x$

2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2} ln(1+{U_n}^2) \end{cases}$$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- عين نهاية المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة

3) لتكن المتتالية (S_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

أ) بين أن المتتالية (S_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. يحتوي صندوق على 5 كريات بيضاء مرقمة: $-1, 0, 1, 1, 1$ و 5 كرات سوداء مرقمة: $-1, 0, 0, 1, 1$ لا نميز بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد من هذا الصندوق.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية:

أ) "سحب كرة واحدة فقط بيضاء"

ب) "سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم"

ت) "سحب ثلاث كرات مجموع أرقامها معدوم"

2) نعتبر المتغير العشوائي Y و الذي يرفق بعملية السحب عدد الكرات التي تحمل الرقم 0 المتبقية في الصندوق

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

II. يحتوي صندوق $\mathcal{U}_1$ على 7 كرات: 4 حمراء و 3 خضراء لا يمكن التمييز بينها عند اللمس

و يحتوي صندوق $\mathcal{U}_2$ على 5 كرات: 3 حمراء و 2 خضراء لا يمكن التمييز بينها عند اللمس

1) نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا 3 كرات من الصندوق $\mathcal{U}_1$

ليكن الحادثة: $\mathcal{A}$ "الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين"

و ليكن الحادثة: $\mathcal{B}$ "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"

أ) أحسب احتمال الحادثتين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$

2) نعتبر الآن التجربة التالية: نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق $\mathcal{U}_1$ ثم نسحب كرة واحدة من الصندوق $\mathcal{U}_2$

لتكن الحادثة: $\mathcal{C}$ "الحصول على 3 كرات حمراء"

أ) بين أن: $P(\mathcal{C}) = \frac{6}{35}$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$

1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = -x + 5 - 2\frac{\ln x}{x}$ و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1) أحسب نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$

2) أحسب $f'(x)$ ثم تحقق أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3)

أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل لـ: $\left(\mathcal{C}_f\right)$ بجوار $+\infty$

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$ بالنسبة للمستقيم (Δ)

4)

أ) بين أن المنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة: α حيث: $4{,}3 < \alpha < 4{,}4$

ب) برر أن: $\ln\alpha = \frac{-\alpha^2+5\alpha}{2}$

5) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$ يكون موازيا للمستقيم (Δ). ثم اكتب معادلة له.

6) أنشئ كلا من المستقيم (Δ) و المماس (T) و المنحني $\left(\mathcal{C}_f\right)$

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(5-m)x - 2\ln x = 0$

التمرين الرابع: (04 نقاط)

.I

1)

أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 4^n على 7

ب) استنتج باقي قسمة العدد 3^{2017} على 7

2) A عدد طبيعي يكتب $7n72$ في النظام العشري. عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $3^{2017} + A \equiv 0[7]$

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نعرف المتتالية $(\mathcal{U}_n)$ كما يلي: $\mathcal{U}_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$

أ) احسب بدلالة n المجموع $\mathcal{S}_n$ حيث: $\mathcal{S}_n = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \cdots + \mathcal{U}_n$

4) ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $\mathcal{S}_n$ قابلا للقسمة على 7 ؟

.II

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $324x - 245y = 7 \ldots (1)$

2) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (1)

- ما هي القيم الممكنة للعدد d