

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (9 نقاط)

- (1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $-7x + 5y = 7$ (1).
- (2) عين أصغر عدد طبيعي y أكبر من 2022، ثم أكتب y في نظام التعداد ذو الأساس 6 .
- (3) ليكن n عددا طبيعيا. و لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية ، حدودها موجبة تماما، أساسها q حيث: $U_1 = e^4$ و $q = e^3$.
نضع: $S_n = \ln(U_0) + \ln(U_1) + \dots + \ln(U_n)$ و ليكن: $a = n + 3$
- (أ) بين أن: $S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.
- (ب) أثبت أن $(n+1)$ و $(3n+2)$ أوليان فيما بينهما.
- (ج) أثبت أن: $PGCD(2S_n; a) = PGCD(a; 14)$.
- (د) عين القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n; a)$ ، ثم عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $PGCD(2S_n; a) = 7$
- (4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لـ 2^n على 7 .

(ب) نضع: $b_n = 3na - 2S_n - 2022^{1443} + 1$ ، عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n - 3 \equiv 4[5] \end{cases}$$

(ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(-3 \times 4^{12n+1} + 2970^{9n+1} + 3)$ يقبل القسمة على 7 .

التمرين الثاني: (7 نقاط)

f و h دالتان معرفتان على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x^2} + (1 + \ln x)^2$ و $h(x) = 1 + \ln x$ و لنعتبر التكاملين:

$$J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx \quad \text{و} \quad I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$$

- (1) (أ) بين أن: $H: x \mapsto x \ln x$ دالة أصلية للدالة: h على المجال $]0; +\infty[$.
(ب) استنتج أن: $I = e$.
- (2) (أ) عين الدالة الأصلية للدالة $H: x \mapsto x \ln x$ و التي تنعدم عند $\sqrt{e}$.
(ب) استنتج مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $y'' = h(x)$.
- (3) (أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، أثبت أن $J = 2e - 1$.
(ب) استنتج حجم الجسم المولد بدوران منحنى الدالة h حول محور الفواصل على المجال: $[1; e]$.
- (4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و المستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N^* بـ : $u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N^* : $u_n \leq 1$.

(2) θ عدد حقيقي من المجال $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ ولنعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتان على N^* بـ :

$$v_1 = 1 \text{ من أجل كل } n \text{ من } N^* : v_{n+1} = \frac{n+1}{n} v_n \cos \theta \text{ و } w_n = \frac{v_n}{n}$$

أ- بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب w_n ، v_n بدلالة n و θ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} w_n$.

ج- بين أنه من أجل كل n من N^* : $v_n \leq u_n$.

(3) S_n المجموع المعرف بـ : $S_n = 1 + 2\cos\theta + \dots + n\cos^{n-1}\theta$.

أ- أحسب $S_n(1 - \cos\theta)$ بدلالة n و θ .

ب- استنتج أن : $S_n = \frac{1 - \cos^n \theta}{(1 - \cos \theta)^2} - \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} v_n$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

استافة المادة: بن صافية