

الإختبار الثاني في مادة: الرياضيات

المدة: 2 ساعة

المستوى : 3 رياضيات

ملاحظة: كل إجابة غير واضحة أو غير مبررة لا تؤخذ بعين الإعتبار.

التمرين الأول :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التالية: $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$... (E)

1. جد الدالة h حل المعادلة التفاضلية (E')، والتي تأخذ القيمة 1 عند 0 حيث: $y' + y = 0 \dots (E')$

2. نعتبر الدالتين f و g القابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(0) = \ln 2 \quad \text{و من أجل كل عدد حقيقي } x: f(x) = e^{-x} \cdot g(x)$$

أ) احسب $g(0)$

ب) احسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$

3. بين أن: f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

4. استنتج عبارة $g(x)$ ، ثم عبارة $f(x)$ بحيث تكون f حلا للمعادلة (E).

التمرين الثاني :

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتالتين (U_n) و (V_n) كما يلي: $U_n = \frac{n^2}{2^n}$ و $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1. بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{2}$

2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $V_n > \frac{1}{2}$

3. أ) عين أصغر عدد طبيعي p يحقق: إذا كان $n \geq p$ فإن $V_n < \frac{3}{4}$

ب) استنتج أنه إذا كان $n \geq p$ فإن: $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 5$: $S_n = U_5 + U_6 + \dots + U_n$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون: $U_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times U_5$

ب) بين أنه من أجل كل $n \geq 5$: $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \dots + (\frac{3}{4})^{n-5} \right] \times U_5$

ج) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون $S_n \leq 4U_5$

5. بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 5}$ متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

التمرين الثالث :

الهدف من التمرين هو حساب مساحة حيز محصور بمنحنيين بين عددين.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = (1 - \frac{1}{x^2}) \ln x$

(ζ_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (γ) المنحني الممثل للدالة $\ln x \mapsto x$ على المجال $]0; +\infty[$ في نفس المعلم. (الشكل 1)

1. حدد وضعية (ζ_f) بالنسبة إلى (γ) في المجال $]0; +\infty[$ ، ثم جد النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x^2}) \ln x$. ماذا تستنتج بالنسبة إلى (ζ_f) و (γ) ؟

2. (أ) x عدد حقيقي حيث $x \geq 1$. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_1^x \frac{1}{t^2} \ln(t) dt = \frac{x-1-\ln x}{x}$

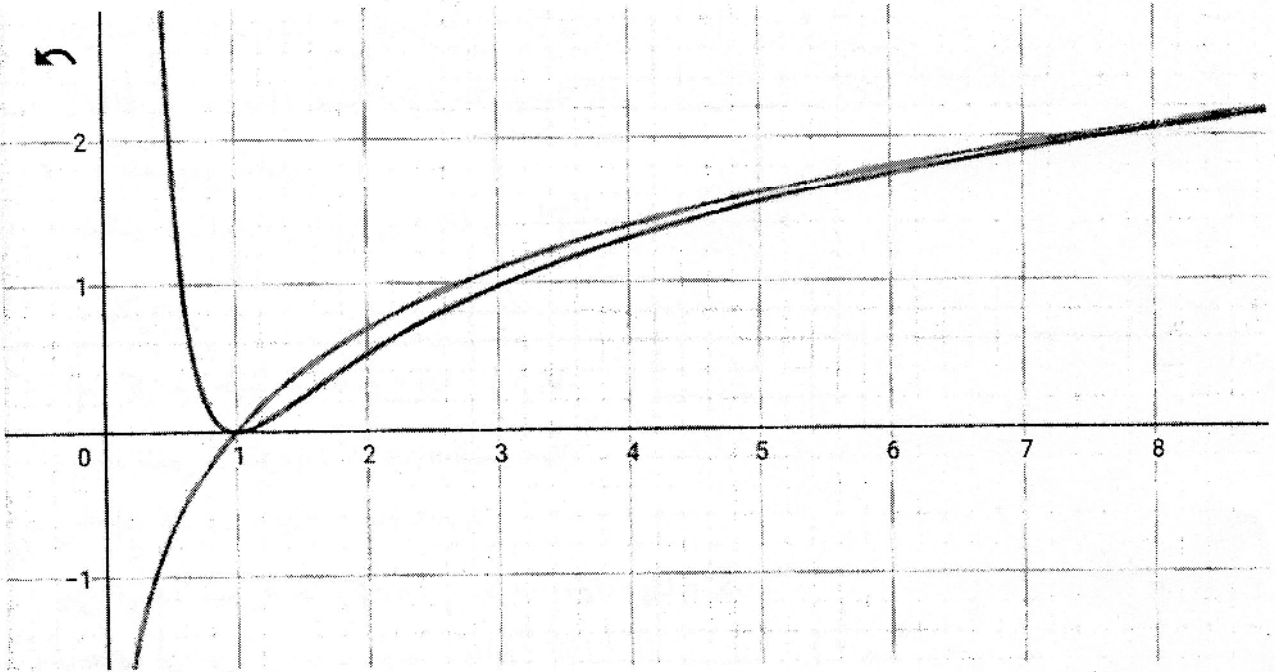
(ب) تحقق أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ دالة أصلية للدالة $\ln x \mapsto x$ على المجال $]1; +\infty[$.

(ج) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

3. α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (ζ_f) والمستقيمين المرفقين بالمعادلتين $x = \alpha$ و $x = 1$ ، ثم احسب

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$$



الشكل 1

- تمنياتي لكم بالتوفيق -