اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المدة: 2 ساعة

التمريـــــن الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2}$

1) أ- برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 1$

ب- أدرس اتجاه تغير (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n}{u_n+\alpha}$ (α عدد طبيعي غير معدوم)

-عين α بحيث تكون (v_n) هندسية.

3) نفرض الآن أن : $\alpha = 1$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية متقاربة ،أكتب v_n بدلالة n .

ب- عبر عن u_n بدلالة v_n و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج- نضع: $s_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n+1}$ و $s_n' = \ln v_0 + \ln v_1 + \ldots\ldots + \ln v_n$

بين أن : $s_n = n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و أن : $s_n' = -(n+1)(n+2)\ln\sqrt{2}$

التمريـــــن الثاني

(I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ ب: $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$ و استنتج اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

(II) f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ ب: $f(x) = x(1 - \ln(x+1))$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- أحسب $f'(x)$ و بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند المبدأ O .

4) عين إحداثيات نقط تقاطع (c_f) مع حاملي محوري الإحداثيات ثم أرسم (T) و (c_f) على $]-1;e]$.

5) أ- بين أن الدالة : $h : x \mapsto \frac{1}{2}\left[x^2\ln(x+1) - \ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + x\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- λ عدد حقيقي بحيث : $-1 < \lambda < 0$, أحسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) و المماس (T) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = \lambda$ و $x = 0$.

ج- أحسب : $\lim\limits_{\lambda\to-1} \mathcal{A}(\lambda)$.

6) K هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;1[$ ب: $k(x) = x(1 - \ln(1-|x|))$ و (c_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- بين أن k فردية ثم أنشىء (c_k) اعتمادا على (c_f) .

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله