اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : سنة ثالثة شعبة علوم تجريبية — المدة : 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول :

التمرين 01 : 04.5 نقاط

I ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 3\ln 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{7}e^{U_n} + 5\right)$.

❶ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \ln 7$.

❷ أثبت أن : $e^{U_n} - e^{U_{n+1}} = \frac{5}{7}\left(e^{U_n} - 7\right)$ ، ثم استنتج أن : $e^{U_n} > e^{U_{n+1}}$.

❸ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم بين أنها ومتقاربة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

II ـ نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بـ : $V_n = e^{U_n} - 7$.

❶ أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية واكتب عبارة حدها العام .

❷ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \ln\left[7 + \left(\frac{2}{7}\right)^n\right]$ ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❸ أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = 7^{\ln\left(e^{U_0}-7\right)} + 7^{\ln\left(e^{U_1}-7\right)} + 7^{\ln\left(e^{U_2}- \ \right)} + \ldots + 7^{\ln\left(e^{U_n}-7\right)}$.

التمرين 02 : 04 نقاط

I ـ f دالة معرفة ، موجبة و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ حيث $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

❶ تحقق أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $f(x) - xe^{-x} = 2xe^{-x}f(x)$.

❷ أثبت أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $xe^{-x} \le f(x) \le \frac{1}{e-2}$.

❸ باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

❹ لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ومحوري الإحداثيات والمستقيم ذو المعادلة $(d) : x = 1$.

⊡ بين أن : $1 - \frac{2}{e} \le A \le \frac{1}{e-2}$.

التمرين 03 : 04.5 نقاط

I ـ صندوق غير شفاف به 5 كريات حمراء و 5 كريات سوداء لا يمكن التمييز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرية من الصندوق إذا كان حمراء نعيدها إلى الصندوق ، ثم نسحب منه كريتين آن واحد وإذا كانت كانت سوداء لا نعيدها إلى الصندوق ونضع بدلها كريتين حمراء ثم نسحب كريتين على التوالي ودون إرجاع من الصندوق .

❶ أحسب احتمال كل من الحادثتين الآتيتين :

♦ A : سحب ثلاث كريات حمراء . ♦ B : الحصول على لونين مختلفين .

❷ أحسب احتمال سحب الكرية الأولى سوداء علما أن الكريات الثلاث المسحوبة من نفس اللون .

II ـ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد انتهاء عملية السحب .

❶ عرف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضياتي ، التباين والإنحراف المعياري .

❷ أحسب كل من : $E(2022+2023X)$ و $P\left(4 \leq \int_6^X dt + \int_5^6 dt + ... + \int_2^3 dt + \int_1^2 dt \leq 5\right)$

التمرين 04 : 07 نقاط

I ـ h و g دالتين معرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x - 1 - \ln x$ و $g(x) = x + (x-2)\ln x$.

❶ شكل جدول تغيرات h ، ثم استنتج أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $h(x) \geq 0$.

❷ بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $g(x) = 1 + h(x) + (x-1)\ln x$.

❸ بين أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $g(x) > 0$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ مفسرا النتيجة هندسيا .

❷ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **(لا حظ أن :** $f(x) = 1 + x\ln x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ **)** .

❸ أثبت أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ أ ـ أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.

ب ـ أثبت أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$.

جـ ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

❺ أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T) على المجال $]0;e]$.

❻ أ ـ بين أن الدالة $x \mapsto x\ln x - x$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $x \in]0;+\infty[$.

ب ـ باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_1^e x\ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$ و $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

جـ ـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (T) والمستقيمين $(d): x = 1$ و $(d'): x = e$.

III ـ (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq e$.

❷ بين أن المتتالية (U_n) متناقصة **(إستعمل السؤال II ـ ❹ ـ جـ)** .

❸ بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

⋄⋄⋄ انتهى الموضوع الأول ⋄⋄⋄

الموضوع الثاني :

التمرين 1 : 5 نقطة

I ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{U_n}$.

❶ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq U_n \leq 4$.

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم بين أنها ومتقاربة واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❸ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$.

❹ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❺ نضع : $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + . \ + U_n$ ، بين أن : $S_n \geq 4n - 2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

II ـ α عدد حقيقي و (V_n) متتالية عددية معرفة بـ : $V_n = \dfrac{4\alpha - U_n}{\alpha - U_n}$.

❶ عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية ثم اكتب عبارة حدها العام .

❷ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) ، ثم احسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❸ احسب بدلالة n المجموع : $R_n = \dfrac{V_0}{4^n} + \dfrac{V_1}{4^{n-1}} + \dfrac{V_2}{4^{n-2}} + \ldots + \dfrac{V_{n-1}}{4} + V_n$.

التمرين 2 : 04 نقاط

◄ f دالة معرفة على المجال $]-1;0]$ بـ : $f(x) = x\ln(1+x)$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$) .

❶ أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

❷ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث : $\dfrac{x^2}{1+x} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

❸ ليكن λ عددا حقيقيا حيث $-1 < \lambda < 0$ ، أحسب بدلالة λ العدد I حيث : $I = \displaystyle\int_{\lambda}^{0} \frac{x^2}{1+x}dx$.

❹ باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب بال cm^2 وبدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 0$ و $x = \lambda$.

❺ تحقق أن : $\lim\limits_{\substack{\lambda \to -1 \\ >}} A(\lambda) = 3$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين 03 : 04 نقاط

◄ ـ صندوق غير شفاف به 10 كريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات تحمل الرقم 0 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 وكريتين تحملان الرقم 3 وكرية واحدة تحمل الرقم 1 ، نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع 4 كريات من الصندوق ونكتب بالترتيب الأرقام المتحصل عليها وهكذا نحصل بالترتيب على عدد مكون من 4 أرقام حيث رقم الآلاف هو الرقم المتحصل عليه في المرة الأولى ورقم المئات هو المتحصل عليه في المرة الثانية ورقم العشرات هو المتحصل عليه في المرة الثالثة

ورقم الآحاد هو المتحصل عليه في المرة الرابعة .

❶ أحسب احتمال كل من الحوادث التالية :

♦ A : العدد المتحصل عليه هو 2023 .

♦ B : العدد المتحصل عليه أرقامه مختلفة مثنى مثنى .

♦ C : العدد المتحصل عليه زوجي .

❷ أحسب : $P_B(C)$.

التمرين 04 : 07 نقاط

I ـ g و h دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1-x)e^x - 1$ و $h(x) = e^x - x - 1$.

❶ أدرس تغيرات الدالتين g و h ثم شكل جدول تغيرات كل منهما .

❷ استنتج أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \leq 0$ و $h(x) \geq 0$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x - 1} - x$.

◄ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

❶ أ ـ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب ـ أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

❷ أ ـ تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}$.

ب ـ بين أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

جـ ـ أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

د ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ') .

❸ أثبت أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{[h(x)]^2} - 1$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

❹ أثبت أنه لا يوجد أي مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ) .

❺ أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث $1 < \alpha < 2$ و $-2 < \beta < -1$.

❻ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ) و (Δ') .

❼ ليكن $m \in \mathbb{R}_+^*$ ، عين قيم m حتى لا تقبل المعادلة : $f(x) = \ln m - x$ أي حل .

❽ لتكن $A(\beta)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = -x$ ، $x = -1$ و $x = \beta$ ، بين أن : $A(\beta) = \ln\left(\dfrac{e\beta}{\beta - 1}\right)$.

✧✧✧ انتهى الموضوع الثاني ✧✧✧