امتحان تجريبي لبكالوريا دورة جوان 2021	
شعبة: رياضيات	**المدة: 4 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار احد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$، ثم استنتج اتجاه تغير (U_n) .

ب) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n+1}$.

أ) اثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب عبارة $_n$ بدلالة n ، ثم بين أن : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$ و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1+i$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ و $z_c = 4$.

1) أ) اكتب الاعداد z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos(\frac{5\pi}{12})$ و $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$ ، احسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$.

3) ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i5\pi}{12}} z$.

حيث z و z' هي لواحق النقطتين M و M' على الترتيب.

- حدد طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة (T_1) للنقط M من المستوي و التي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$.

ب) أوجد المجموعة (T_2) للنقط M من المستوي و التي تحقق: $Arg(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع .

5) أوجد صورة (T_1) بالتحويل S ، استنتج مساحتها.

التمرين الثالث:

1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة العدد الطبيعي 4^n على 7 .
2) هل العدد $2020^{2021} - 1441^{1442} - 1$ يقبل القسمة على 7 .
3) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد $1957^n + 1957^{2n} + 1957^{3n}$ على 7 .
4) نعتبر العدد $A = \overline{2a032a1}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 4 .

- عين قيمة العدد الطبيعي a التي من أجلها A يقبل القسمة على ثم أكتب A في النظام العشري.

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

جزء 1: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 4(1+2x)e^{2x}$.
2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
3) استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ أن: $g(x) \geq 0$

جزء 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (2x+1)e^{2x} + x + 1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$

1) احسب نهاية الدالة عند $+\infty$ و $-\infty$.
2) أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.
   ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
4) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.
   ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\frac{-1}{2}$.
   ج) أنشئ (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .
5) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، اثبت أن: $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}x = 1 - \frac{e}{2}$
   ب) لتكن A المساحة (بالسنتيمتر مربع) للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (T)
   والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 0$ ، $x = \frac{1}{2}$
   - بين أن: $A = (6 - 2e)cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

أ/ نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(E) \ldots\ldots z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$$

1. برهن أن العدد i حل للمعادلة (E) .

2. عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا:

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

ب/ نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقط: A ، B و C لواحقها i ، $2+3i$ ، $2-3i$ على الترتيب.

1. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، عين لاحقة النقطة D صورة A بالدوران r .
2. برهن أن النقط D ، B ، C على استقامة ثم عين الكتابة المركبة للتحاكي ذو المركز B والذي يحول D إلى C .
3. استنتج طبيعة وخصائص التحويل النقطي الذي مركزه B يحول A إلى C .

التمرين الثاني:

تحتوي علبة شكولاتة ذات نوعين: بيضاء وسوداء على سبعة قطع بيضاء منها 4 قطع مبلغها 1 و ثلاثة مبلغهم 5، و 8 سوداء منها ستة مبلغها 1 و اثنتان مبلغهما 5.

نسحب قطعتين من العلبة في ان واحد.

لتكن الحوادث التالية: A " سحب قطعتين من نفس النوع"، B"سحب قطعتين لهما نفس المبلغ"،

C "سحب قطعة سوداء على الأقل"

1) بين أن: $P(A)=\frac{49}{105}$.
2) أحسب $P(B)$ و $P(C)$.
3) احسب احتمال الحادثة " سحب قطعتين من نفس النوع ولهما نفس المبلغ" ثم استنتج احتمال الحادثة " سحب قطعتين من نفس النوع أو لهما نفس المبلغ"
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي المبلغ الإجمالي للقطعتين المسحوبتين.
   أ) حدد قيم وقانون احتمال المتغير العشوائي X.
   ب) احسب الامل الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

2) أ) بين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)(1-2u_n)}{2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها.

3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب) استنتج أن: $u_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

4) لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{v_0-1}{u_0} + \frac{v_0-1}{u_0} + \cdots + \frac{v_n-1}{u_n}$

التمرين الرابع:

الجزء 1:

نعتبر f الدالة المعرفة على R ب: $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
2. بين أن $g(x) \leq 0$ من أجل كل x من R .

الجزء 2:

f دالة معرفة على R ب: $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، تمثيلها البياني في مستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ أنشئ (C_f) .

الجزء 3:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ ب: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2ln2$
3. استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = ln4$ ، $x = 0$.