



المستوى: السنة الثالثة تسيير و اقتصاد فيفري 2021

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات المدة: ساعتين

التمرين الأول

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$.

(1) أ- أحسب u_1 و u_2 و u_3 ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $n > \frac{2}{3}$.

ج- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

لبيّن أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

بداكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$.

ج- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) احسب، بدلالة n , المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني

(I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

(5) ا) بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

(6) اوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) .

(7) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحني (C_f) .

التصحيح النموذجي

التمرين 1:

(1) حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{7}{9} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{57}{81} \quad \text{و} \quad u_3 = \frac{55}{81}$$

تبيان أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \quad \text{ومنه} \quad (u_n) \text{ ليست حسابية.}$$

$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1} \quad \text{ومنه} \quad (u_n) \text{ ليست هندسية.}$$

(ب) البرهان بالتراجع :

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

$$\text{لدينا: } u_0 = 1 > \frac{2}{3} \quad \text{إذن: } P(0) \text{ صحيحة.}$$

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n > \frac{2}{3}$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} > \frac{2}{3}$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n > \frac{2}{3}$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{9} u_n > \frac{2}{9}$$

$$\text{وعليه: } \frac{3}{9} u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\text{أي: } u_{n+1} > \frac{2}{3}$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > \frac{2}{3}$.

ببتبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$\text{• لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{3}{9} u_n + \frac{4}{9} - u_n = \left(\frac{3}{9} - 1\right) u_n + \frac{4}{9} = -\frac{6}{9} u_n + \frac{4}{9}$$

• ولدينا من جهة أخرى: $u_n > \frac{2}{3}$

$$\text{ومنه: } -\frac{6}{9} u_n < -\frac{4}{9}$$

$$\text{وعليه: } -\frac{6}{9} u_n + \frac{4}{9} < -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\text{أي: } u_{n+1} - u_n < 0 \quad \text{إذن: } (u_n) \text{ متناقصة تماما.}$$

2) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.
لتبيان أن (v_n) متتالية هندسية، نطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}u_n - \frac{3 \times 2}{9 \times 3} = \frac{3}{9}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{9}v_n$$

أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

بكتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه: $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

لدينا: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ، ومنه: $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3}$. إذن: $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

3) حساب S_n بدلالة n ، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_2 + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_n + \frac{2}{3}\right)$.

ومنه: $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n - 0 + 1) = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n + 1)$.

وعليه: $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}(n + 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{2}{3}(n + 1)$.

التمرين 2

$$g(x) = x^3 - 3x - 3 \quad (I)$$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

* النهايات: $D_g =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

* اتجاه التغير:

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ ومنه $g'(x) = 0$ معناه $x = 1$ أو $x = -1$ و

$g'(x) > 0$ معناه $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ وأيضا $g'(x) < 0$ معناه $x \in]-1; 1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	
$g(x)$		-1	-5	

(2) اثبات ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$:

الدالة g مستمرة على المجال $]2;3[$ و $g(2)=-1$ و $g(3)=15$ أي $g(2) \times g(3) < 0$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة $g(x)=0$ على الأقل حل في المجال $]2;3[$ ومن خلال جدول التغيرات ينتج ان الدالة g متزايدة تماما على المجال $]2;3[$ اذن فللمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $]2;3[$.

(3) استنتاج إشارة $g(x)$: من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان المنحني يقع تحت محور

الفواصل لما $x \in]-\infty; \alpha[$ ومنه نستنتج ان $g(x) < 0$ معناه $x \in]-\infty; \alpha[$ و كذلك

المنحني يقع فوق محور الفواصل لما $x \in]\alpha; +\infty[$ أي $g(x) > 0$ معناه $x \in]\alpha; +\infty[$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

(1) حساب النهايات: $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

(2) اثبات انه من اجل كل $x \in D_f$ فان : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(2x^3 + x^2 + 2)'(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(6x^2 + 2x)(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2) \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 2x^3 - 2x - 4x^4 - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لنا $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ أي ان إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $xg(x)$:

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
x		-	0	+	+	+	
$g(x)$		-	-	-	0	+	
$f'(x) = xg(x)$		+	0	-	-	0	+

من خلال هذا الجدول نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على المجموعة $]0; 1[\cup]1; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]\alpha; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-2	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) اثبات ان $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ وتعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) - 3\alpha - 1 &= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1} - 3\alpha - 1 \\
 &= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2 - 3\alpha^3 + 3\alpha - \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha + 3}{\alpha^2 - 1} \\
 &= -\frac{\alpha^3 - 3\alpha - 3}{\alpha^2 - 1} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 - 1} = 0
 \end{aligned}$$

لان $g(\alpha) = 0$

اذن نجد $f(\alpha) - 3\alpha - 1 = 0$ ومنه $f(\alpha) = 3\alpha + 1$.

تعيين الحصر: لنا $2 < \alpha < 3$ ومنه $6 < 3\alpha < 9$ ومنه $7 < 3\alpha + 1 < 10$ أي $7 < f(\alpha) < 10$.

