المستوى الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد
فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات
المدة : 2سا

التمرين الأول (5 ن):

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و جدول تغيراتها معطى كما يلي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع التبرير:

أ- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

ب- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R} - \{-1\}$

ج- $f'(x) > 0$ على المجال $]-1; +\infty[$

د- $f(2) = -2$

هـ- النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى (C_f)

و- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

التمرين الثاني (7 ن):

I. لتكن الدوال k، g و h معرفة بـ:

$$k(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \qquad D_k = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} - 3x - \frac{4}{x^3} \qquad D_g = \mathbb{R}^*$$

$$h(x) = \frac{8}{(x+1)^3} \qquad D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$$

1- أوجد الدوال الأصلية K، G و H لكل من الدوال k، g و h على الترتيب

2- أحسب $\int_{-1}^{0} k(x)dx$ ، $\int_{-3}^{-2} g(x)dx$ و $\int_{2}^{3} h(x)dx$

II. لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1$

1- أوجد كل الدوال الأصلية للدالة f

2- أوجد الدالة الأصلية F للدالة f التي تحقق $F(2) = 3$

3- احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1,2]$

التمرين الثالث (8 ن):

f دالة معرفة على $]-2;8[$ بـ: $f(x) = ln(x+2) + ln(-x+8) - ln16$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ و فسر النتيجة بيانيا

2) بين أنه من أجل كل x من $]-2;8[$: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) لتكن الدالة العددية F المعرفة على $]-2;8[$ بـ:

$$F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - xln16$$

بين أن F أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$

5) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = 0$ و $x = 4$

التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (5 ن):

أ- صحيح لان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ب- خطأ لان من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) > 0$

ج- خطأ لان الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

د- خطأ لان على المجال $]-1;+\infty[$: $f(x) > 2$ او نقول لان $-2 \notin]2;+\infty[$

هـ- خطأ لان على المجال $]-\infty;-1[$: $f(x) > 2$ او نقول لان $1 \notin]2;+\infty[$

و- خطأ لان $\lim\limits_{x\to-1^<} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^>} f(x) = +\infty$

التمرين الثاني (7 ن):

1- الدوال الأصلية K، G و H

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x + c \qquad D_k = \mathbb{R}$$

$$G(x) = \frac{-1}{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2x^2} + c \qquad D_g = \mathbb{R}^*$$

$$H(x) = \frac{-8}{2(x+1)^2} \qquad D_h = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2- $\int_{-1}^{0} k(x)dx = \frac{37}{12}$ ، $\int_{-3}^{-2} g(x)dx = \frac{143}{18}$ و $\int_{2}^{3} h(x)dx = \frac{7}{36}$

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1$

1- $F(x) = x^2 - x + c$

2- $F(x) = x^2 - x + 1$

3- $m = 2$

التمرين الثالث (8 ن):

1) حساب نهايتي الدالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$:

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-2^>} f(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to-2^>} \ln(x+2) = \lim\limits_{y\to0^>} \ln y = -\infty$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to8^<} f(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to8^<} \ln(-x+8) = \lim\limits_{y\to0^>} \ln y = -\infty$.

تفسير النتيجتين بيانيا:

المستقيمان اللّذان معادلتاهما $\boxed{x=-2}$ و$\boxed{x=8}$ على الترتيب (الموازيان لحامل محور التراتيب) مستقيمان مقاربان لـ(C_f).

2)التحقق أنّه من أجل كلّ x من $]-2;8[$، $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$:

f قابلة للاشتقاق على $]-2;8[$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{-x+8} = \frac{1(-x+8)-1(x+2)}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-x+8-x-2}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$ (وهو المطلوب)

3)دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ وتشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

لدينا: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$، ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+6)$

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-2		3		8
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2\ln\frac{5}{4}$	↘	‖ $-\infty$

تبيان أن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$:

F قابلة للاشتقاق على $]-2;8[$، ولدينا:

$$F'(x)=\left[1\times\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\times(x+2)\right]+\left[1\times\ln(-x+8)+\frac{(-1)}{-x+8}\times(x-8)\right]-2-\ln 16$$

ومنه: $F'(x)=\ln(x+2)+1+\ln(-x+8)+1-2-\ln 16=f(x)$

وبالتالي: F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$.

8)حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$، $x=0$ و $x=4$:

لتكن مساحية الحيز هي A **ومنه:**

$$A=1.3642\ cm^2$$