مديرية التربية لولاية الجلفة | ثانوية الشهيد ماصي محمد -المليليحة-

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة ثانوي | الموسم الدراسي: 2024-2025

الشعبة: تسيير واقتصاد | المـدة: ساعة

تؤخذ بعين الاعتبار فقط لا غير الإجابات الدقيقة والواضحة . يمنع منعًا باتًّا استعمال القلم الماحي" l'effaceur " والقلم الأحمر

نص التمرين

20.00 نقطة

$I)$ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{x^2}$

1. عيّن تبعا لقيم x إشارة $g(x)$
2. أ_ تحقّق أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)=-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

   ب_ استنتج الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$

$II)$ f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;8]$ بـ : $f(x)=3-x-\dfrac{2}{x}+\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ_ تحقق أنّ f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1

   ب_ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;8]$

   ج_ احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

   د_ شكل جدول تغيرات الدالة f
2. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث : $3.8<\alpha<3.9$
3. مثّل بيانيا (C_f)

$III)$ h الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\dfrac{2}{3};2\right]$ بـ : $h(x)=f(3x+2)$

1. بيّن أنّه إذا كان $-\dfrac{2}{3}<x\leq 0$ فإنّ $0<3x+2\leq 2$ ، وإذا كان $0\leq x\leq 2$ فإنّ $2\leq 3x+2\leq 8$
2. احسب $h'(x)$ (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)
3. شكل جدول تغيرات h

الحل النموذجي للفرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

ملاحظة هامة ! تقبل جميع الإجابات الصحيحة -رياضيا-

عناصر الإجابة	العلامة
نص التمرين (20 نقطة) :	

I) لدينا: $g(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^2}$ و $D_g=]0;+\infty[$.

1) تعيين، تبعا لقيم x، إشارة $g(x)$:

إشارة $g(x)$ من إشارة البسط $(-x^2+x+2)$ على $]0;+\infty[$.

نضع: $-x^2+x+2=0$ مميزها: $\Delta=(1)^2-4(-1)(2)=9>0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x'=\frac{-(1)+\sqrt{9}}{2(-1)}=\frac{-1+3}{-2}=\frac{2}{-2}=-1\notin]0;+\infty[$ و $x''=\frac{-(1)-\sqrt{9}}{2(-1)}=\frac{-1-3}{-2}=\frac{-4}{-2}=2$.

x	0		2		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	

2) التحقق أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، لدينا: $\boxed{g(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^2}=\frac{-x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$.

باستنتاج الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$:

الدوال الأصلية للدالة g على $]0;+\infty[$، هي دوال من الشكل $G:x\mapsto -x+\ln x-\frac{2}{x}+k$ (حيث $k\in\mathbb{R}$)

II) لدينا: $f(x)=3-x-\frac{2}{x}+\ln x$ و $D_f=]0;8]$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) التحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1:

ط01 لدينا: $\begin{cases} f'(x)=-1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=g(x) \\ f(1)=3-1-\frac{2}{1}+\ln 1=0 \end{cases}$، إذن: f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

ط02 لدينا: $\int_1^x g(t)dt=[G(t)]_1^x=G(x)-G(1)=\left(-x+\ln x-\frac{2}{x}+k\right)-\left(-1+\ln 1-\frac{2}{1}+k\right)$

ومنه: $\int_1^x g(t)dt=-x+\ln x-\frac{2}{x}+3=f(x)$،

إذن: f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

باستنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;8]$:

لدينا: من أجل كل x من $]0;8]$، $\boxed{f'(x)=g(x)}$ (لأن f دالة أصلية لـ g)

أي: لـ $f'(x)$ و $g(x)$ **نفس الإشارة.**

إذن: f **متزايدة تماما** على المجال $]0;2]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[2;8]$.

جـحساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$، ثم تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(3 - x - \frac{2}{x} + \ln x\right) = -\infty$، لأن: $\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

التفسير الهندسي:

بما أن: $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty}$، فإن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = 0}$ (محور التراتيب) مقارب لـ (C_f).

دـتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	0		2		8
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	$\frac{-21}{4} + 3\ln 2$

2)تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α، حيث $3,8 < \alpha < 3,9$:

بالنسبة للحل الأول:

f **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0; 2]$

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty \\ f(2) = \ln 2 > 0 \end{cases}$ أي: $0 \in]-\infty; \ln 2]$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا وهو العدد ***1*** في المجال $]0; 2]$.

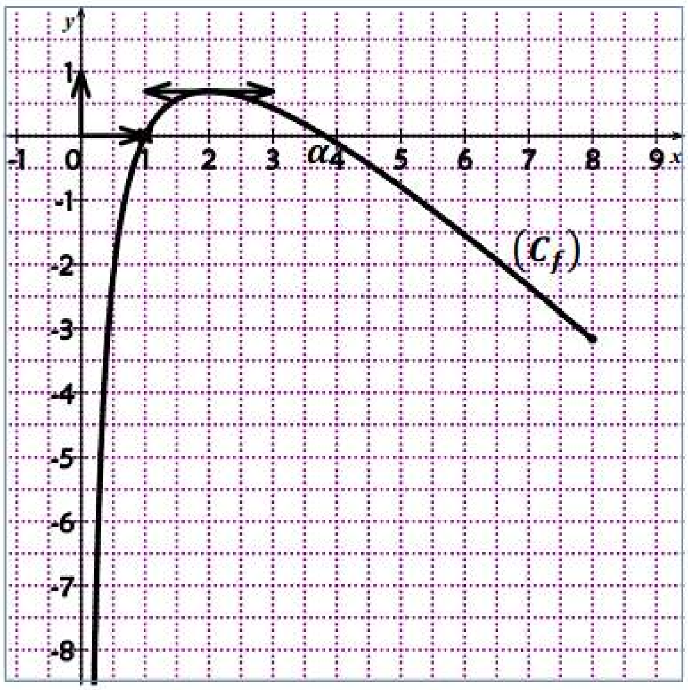
بالنسبة لـα:

f **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $]3,8; 3,9[$ (لأنها **متناقصة تماما** على المجال $[2; 8]$)

ولدينا: $\begin{cases} f(3,8) \simeq 0,01 \\ f(3,9) \simeq -0,05 \end{cases}$ أي: $f(3,8) \times f(3,9) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,8 < \alpha < 3,9$.

3)تمثيل بيانيا (C_f):



III) لدينا: $h(x)=f(3x+2)$ و $D_h=\left]-\frac{2}{3};2\right]$.

نلاحظ أن: h عبارة عن مركب دالتين f و $x\mapsto 3x+2$.

1) في حالة: $-\frac{2}{3}<x\leq 0$ فإن: $-2<3x\leq 0$ ويكون: $0<3x+2\leq 2$،

وفي حالة: $0\leq x\leq 2$ فإن: $0\leq 3x\leq 6$ ويكون: $2\leq 3x+2\leq 8$.

2) حساب $h'(x)$: (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تذكير: $\boxed{[u(ax+b)]'=au'(ax+b)}$.

h قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{2}{3};2\right]$، ولدينا: $\boxed{h'(x)=3f'(3x+2)}$.

3) تشكيل جدول تغيرات h:

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(3x+2)$.

لدينا:

$3x+2$	0		2		8
$f'(3x+2)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(3x+2)$	‖ $-\infty$	↗	$\ln 2$	↘	$\frac{-21}{4}+3\ln 2$

وباستعمال السؤال 1) نجد:

x	$-\frac{2}{3}$		0		2
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\ln 2$	↘	$\frac{-21}{4}+3\ln 2$